

SUR QUELQUES PROBLÈMES VARIATIONNELS À FRONTIÈRE LIBRE INTERVENANT EN MÉCANIQUE.

Antoine Lemenant

IECL & Université de Lorraine

Nancy - 29 Mars 2022

Sommaire

I) (Introduction) Régularité des ensembles presque minimaux

II) La fonctionnelle de Mumford-Shah

III) La fonctionnelle de Griffith

IV) Problèmes de compliance optimale

V) Problème de compliance optimale d'ordre 2

Sommaire

I) (Introduction) Régularité des ensembles presque minimaux

II) La fonctionnelle de Mumford-Shah

III) La fonctionnelle de Griffith

} Problèmes à "discontinuité" libre

IV) Problèmes de compliance optimale

V) Problème de compliance optimale d'ordre 2

} Problème à "Frontière" libre

Sommaire

I) (Introduction) Régularité des ensembles presque minimaux

II) La fonctionnelle de Mumford-Shah

III) La fonctionnelle de Griffith

IV) Problèmes de compliance optimale

V) Problème de compliance optimale d'ordre 2

"dualité"

"dualité"

Sommaire

I) (Introduction) Régularité des ensembles presque minimaux

II) La fonctionnelle de Mumford-Shah

III) La fonctionnelle de Griffith

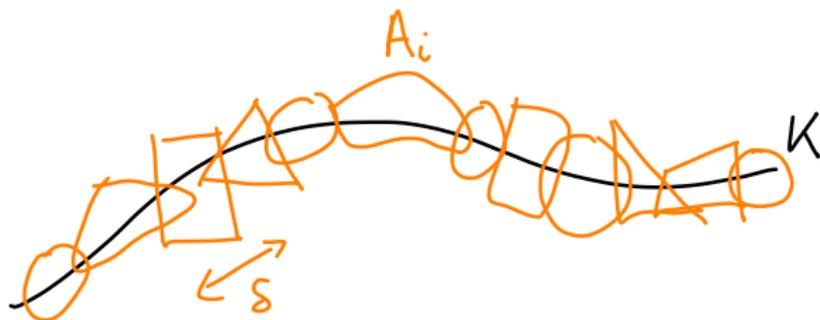
IV) Problèmes de compliance optimale

V) Problème de compliance optimale d'ordre 2

Mesure de Hausdorff \mathcal{H}^1

$K \in \mathcal{K}$ (l'ensemble des compacts connexes de \mathbb{R}^N)

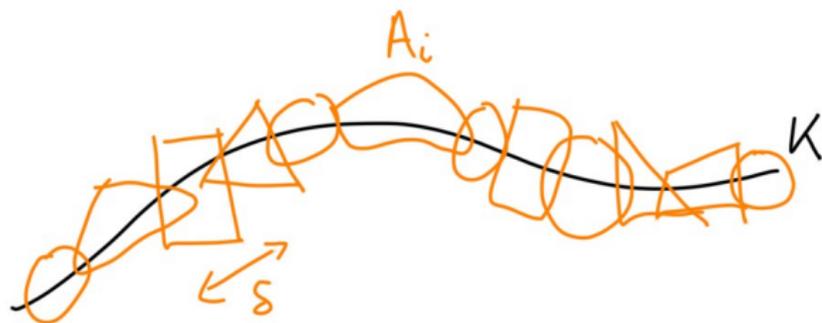
tel que $K \subset \bigcup_i A_i$ et $\text{diam}(A_i) \leq \delta$



Mesure de Hausdorff \mathcal{H}^1

$K \in \mathcal{K}$ (l'ensemble des compacts connexes de \mathbb{R}^N)

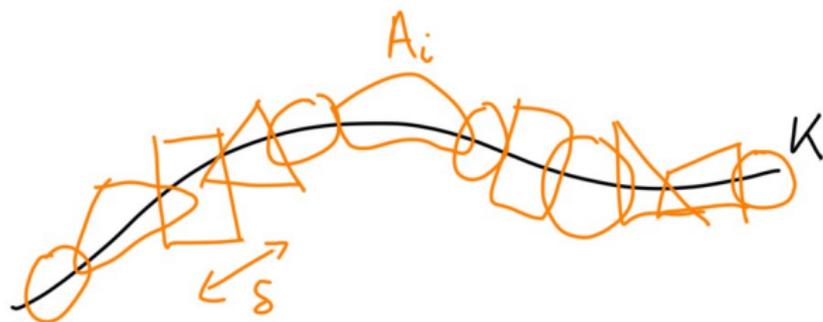
$$\sum_i \text{diam}(A_i) \quad \text{tel que } K \subset \bigcup_i A_i \text{ et } \text{diam}(A_i) \leq \delta$$



Mesure de Hausdorff \mathcal{H}^1

$K \in \mathcal{K}$ (l'ensemble des compacts connexes de \mathbb{R}^N)

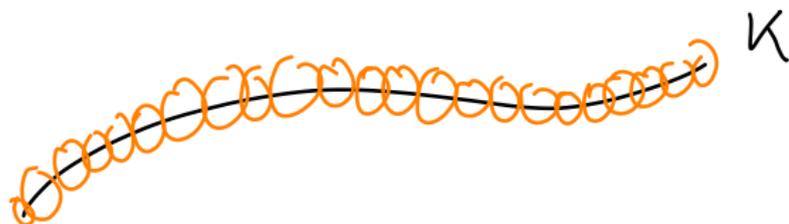
$$\inf \sum_i \text{diam}(A_i) \quad \text{tel que } K \subset \bigcup_i A_i \text{ et } \text{diam}(A_i) \leq \delta$$



Mesure de Hausdorff \mathcal{H}^1

$K \in \mathcal{K}$ (l'ensemble des compacts connexes de \mathbb{R}^N)

$$\sup_{\delta > 0} \left\{ \inf \sum_i \text{diam}(A_i) \quad \text{tel que } K \subset \bigcup_i A_i \text{ et } \text{diam}(A_i) \leq \delta \right\}$$



Mesure de Hausdorff \mathcal{H}^1

$K \in \mathcal{K}$ (l'ensemble des compacts connexes de \mathbb{R}^N)

$$\sup_{\delta > 0} \left\{ \inf \sum_i \text{diam}(A_i) \quad \text{tel que } K \subset \bigcup_i A_i \text{ et } \text{diam}(A_i) \leq \delta \right\}$$



Mesure de Hausdorff \mathcal{H}^1

$K \in \mathcal{K}$ (l'ensemble des compacts connexes de \mathbb{R}^N)

$$\sup_{\delta > 0} \left\{ \inf \sum_i \text{diam}(A_i) \quad \text{tel que } K \subset \bigcup_i A_i \text{ et } \text{diam}(A_i) \leq \delta \right\}$$



Mesure de Hausdorff \mathcal{H}^1

$K \in \mathcal{K}$ (l'ensemble des compacts connexes de \mathbb{R}^N)

$$\mathcal{H}^1(K) := \sup_{\delta > 0} \left\{ \inf \sum_i \text{diam}(A_i) \quad \text{tel que } K \subset \bigcup_i A_i \text{ et } \text{diam}(A_i) \leq \delta \right\}$$



Mesure de Hausdorff \mathcal{H}^1

Exemple si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une courbe régulière injective:

$$\mathcal{H}^1(\gamma([0, 1])) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

Ensembles presque-minimaux

Ensemble presque minimal

Definition

On dit que $K \in \mathcal{K}$ compact connexe est presque minimal dans $\Omega \subset E$ avec fonction jauge ξ si pour toute boule $B(x, r) \subset \Omega$ et $L \in \mathcal{K}$ tel que $K \setminus B = L \setminus B$ on ait

$$\mathcal{H}^1(K \cap B) \leq \mathcal{H}^1(L \cap B) + r\xi(r).$$

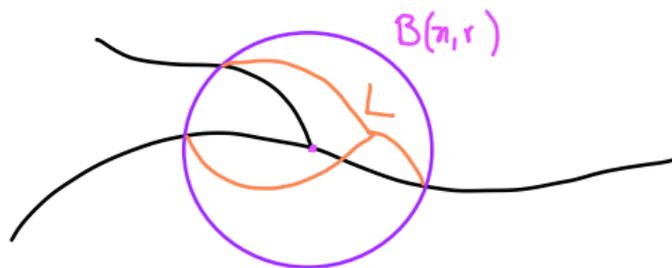


Ensemble presque minimal

Definition

On dit que $K \in \mathcal{K}$ compact connexe est presque minimal dans $\Omega \subset E$ avec fonction jauge ξ si pour toute boule $B(x, r) \subset \Omega$ et $L \in \mathcal{K}$ tel que $K \setminus B = L \setminus B$ on ait

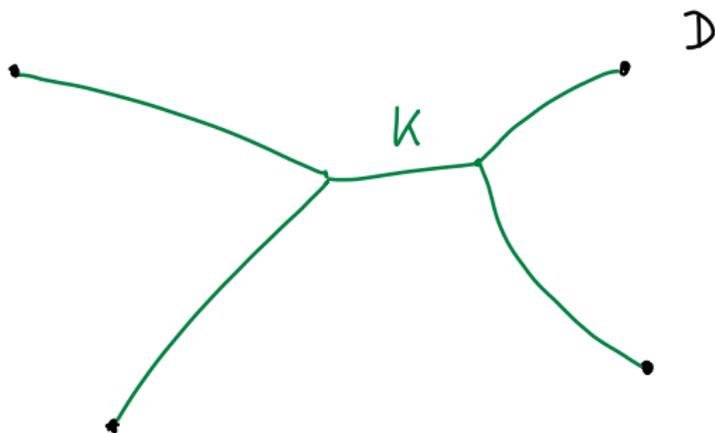
$$\mathcal{H}^1(K \cap B) \leq \mathcal{H}^1(L \cap B) + r\xi(r).$$



Exemples

Exemple: Problème de Steiner à poids : $D \subset E$, compact donné,

$$\min_{K \in \mathcal{K}, D \subset K} = \int_K w(s) d\mathcal{H}^1(s).$$



Exemples

Exemple: Problème de Steiner à poids : $D \subset E$, compact donné,

$$\min_{K \in \mathcal{K}, D \subset K} = \int_K w(s) d\mathcal{H}^1(s).$$

sous-Exemple : Distance géodésique à poids (typiquement w Hölder)

$$d(x, y) = \min_{\Gamma: x \rightsquigarrow y} = \int_{\Gamma} w(s) d\mathcal{H}^1(s).$$

Exemples

Exemple: Problème de Steiner à poids : $D \subset E$, compact donné,

$$\min_{K \in \mathcal{K}, D \subset K} = \int_K w(s) d\mathcal{H}^1(s).$$

sous-Exemple : Distance géodésique à poids (typiquement w Hölder)

$$d(x, y) = \min_{\Gamma: x \rightsquigarrow y} = \int_{\Gamma} w(s) d\mathcal{H}^1(s).$$

sous-sous-Exemple : distance "quasihyperbolique" pour $C \subset E$ convexe,

$$w(x) = \frac{1}{\text{dist}(x, \partial C)}.$$

Regularité pour les ensembles presque minimaux:

Cas Euclidien (bien connu)

Si $\xi(r)$ satisfait la condition suivante de type Dini

$$\int_0^{r_0} \frac{\sqrt{\xi(r)}}{r} dr < \infty,$$

alors tout ensemble ξ -presque minimal dans \mathbb{R}^N est une **union de courbes C^1** qui se joignent par 3 avec angles égaux.

Regularité pour les ensembles presque minimaux:

Cas Euclidien (bien connu)

Si $\xi(r)$ satisfait la condition suivante de type Dini

$$\int_0^{r_0} \frac{\sqrt{\xi(r)}}{r} dr < \infty,$$

alors tout ensemble ξ -presque minimal dans \mathbb{R}^N est une **union de courbes C^1** qui se joignent par 3 avec angles égaux. De plus l'oscillation de γ' est contrôlée par

$$\zeta(r) := \int_0^r \frac{\sqrt{\xi(t)}}{t} dt.$$

(Exemple: $\xi(r) = Cr^{2\alpha} \Rightarrow$ courbes de régularité $C^{1,\alpha}$).

Remarques rapides

Remarque 1

Une preuve peut se trouver dans [Morgan, 1994] (mais aussi dans [David 2010] ou encore dans [De Pauw-L.-Milot 2017]).

Remarques rapides

Remarque 1

Une preuve peut se trouver dans [Morgan, 1994] (mais aussi dans [David 2010] ou encore dans [De Pauw-L.-Milot 2017]).

Remarque 2

Dimension supérieure: il existe une théorie de régularité, voir Almgren (aussi Taylor, David en 3D), et autres....

Remarques rapides

Remarque 1

Une preuve peut se trouver dans [Morgan, 1994] (mais aussi dans [David 2010] ou encore dans [De Pauw-L.-Milot 2017]).

Remarque 2

Dimension supérieure: il existe une théorie de régularité, voir Almgren (aussi Taylor, David en 3D), et autres....

Remarque 3

Il est “bien connu” que la double spirale logarithmique

$$[-1, 1] \ni r \mapsto |r|e^{i \ln(|\ln(r)|)} \subset \mathbb{R}^2$$

est une courbe presque minimale dans $B(0, 1)$ non-différentiable en l'origine, avec jauge ξ non-Dini.

Sommaire

I) Ensembles presque minimaux

II) La fonctionnelle de Mumford-Shah

III) La fonctionnelle de Griffith

IV) Problèmes de compliance optimale

V) Problème de compliance optimale d'ordre 2

La fonctionnelle de Mumford-Shah

La fonctionnelle de Mumford-Shah

[Mumford-Shah, 1989] pour $g \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\min_{u \in H^1(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} F(u, K) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

La fonctionnelle de Mumford-Shah

[Mumford-Shah, 1989] pour $g \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\min_{u \in H^1(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} F(u, K) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$



La fonctionnelle de Mumford-Shah

[Mumford-Shah, 1989] pour $g \in L^\infty$

$$\min_{u \in H^1(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} F(u, K) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

La fonctionnelle de Mumford-Shah

[Mumford-Shah, 1989] pour $g \in L^\infty$

$$\min_{u \in H^1(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} F(u, K) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

Longue histoire....

La fonctionnelle de Mumford-Shah

[Mumford-Shah, 1989] pour $g \in L^\infty$

$$\min_{u \in H^1(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} F(u, K) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

Longue histoire....

- existence : compliqué en général (Théorème de De Giorgi-Carriero-Leaci 1989) [remarque: mais facile si on ajoute K connexe.]

La fonctionnelle de Mumford-Shah

[Mumford-Shah, 1989] pour $g \in L^\infty$

$$\min_{u \in H^1(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} F(u, K) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

Longue histoire....

- existence : compliqué en général (Théorème de De Giorgi-Carriero-Leaci 1989) [remarque: mais facile si on ajoute K connexe.]
- régularité : conjecture de M-S.

La fonctionnelle de Mumford-Shah

[Mumford-Shah, 1989] pour $g \in L^\infty$

$$\min_{u \in H^1(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} F(u, K) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

Longue histoire....

- existence : compliqué en général (Théorème de De Giorgi-Carriero-Leaci 1989) [remarque: mais facile si on ajoute K connexe.]
- régularité : conjecture de M-S. connue pour toute composante connexe K : [A. Bonnet 1996] elle est **une union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ se joignant par 3** avec angles de 120° .

La fonctionnelle de Mumford-Shah

[Mumford-Shah, 1989] pour $g \in L^\infty$

$$\min_{u \in H^1(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} F(u, K) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

Longue histoire....

- existence : compliqué en général (Théorème de De Giorgi-Carriero-Leaci 1989) [remarque: mais facile si on ajoute K connexe.]
- régularité : conjecture de M-S. connue pour toute composante connexe K : [A. Bonnet 1996] elle est **une union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ se joignant par 3** avec angles de 120° . Voir aussi [Ambrosio, Fusco, Pallara 96] [David 96] [L. 2008], ...

Ingrédients principaux de Bonnet

- ① “formule de monotonie”: Si K est connexe alors $r \mapsto \frac{1}{r} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx$ est croissante. Plus généralement, si

$$\sup\left\{\frac{\mathcal{H}^1(C)}{r}, C \text{ c.connexe de } \partial B_r \setminus K\right\} > \gamma$$

alors $r \mapsto \frac{1}{r^{1+\beta(\gamma)}} \int_{B_r \setminus K} |\nabla u|^2 dx$ est croissante.

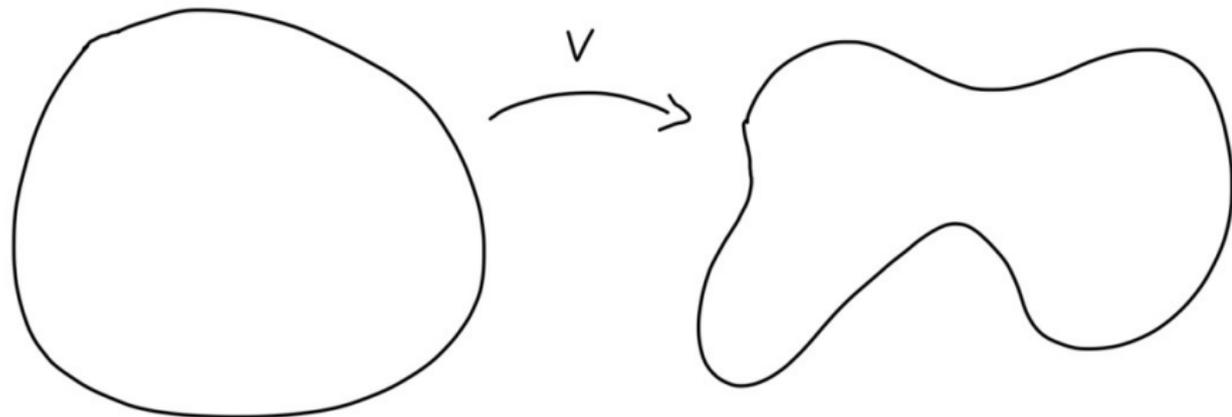
- ② étude des limites de blow-up: $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{r}} u(r(x - x_0) + x_0)$ et $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r}(K - x_0)$

Sommaire

- I) Ensembles presque minimaux
- II) La fonctionnelle de Mumford-Shah
- III) La fonctionnelle de Griffith
- IV) Problèmes de compliance optimale
- V) Problème de compliance optimale d'ordre 2

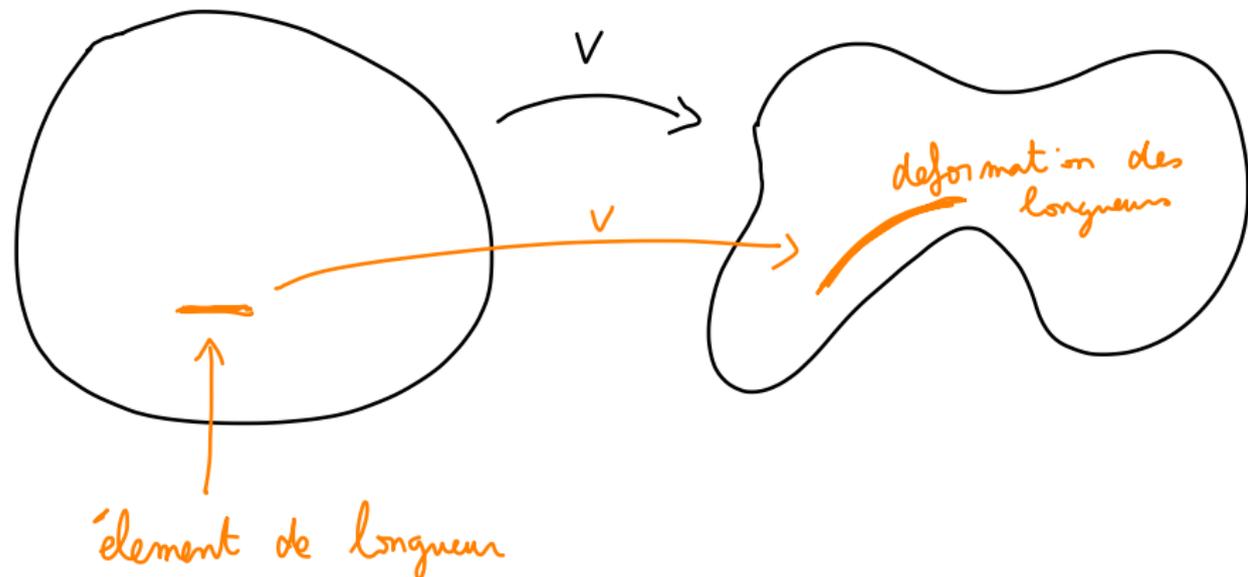
Elasticité Linéarisée

$v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ déformation.



Elasticité Linéarisée

$v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ déformation.



Elasticité Linéarisée

$v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ déformation.

Energie

$$\int_{\Omega} W(x, Dv) \, dx$$

avec

$$W(x, Dv) \geq \alpha \operatorname{dist}(Dv, SO(3))^2.$$

Elasticité Linéarisée

$v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ déformation.

Energie

$$\int_{\Omega} W(x, Dv) dx$$

avec

$$W(x, Dv) \geq \alpha \text{dist}(Dv, SO(3))^2.$$

$$W(x, Dv) = V(x, Dv^T Dv - Id).$$

Elasticité Linéarisée

$v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ déformation.

Energie

$$\int_{\Omega} V(x, Dv^T Dv - Id) dx$$

Elasticité Linéarisée

$v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ déformation.

Energie

$$\int_{\Omega} V(x, Dv^T Dv - Id) dx$$

Déplacement $u = v - Id$

Elasticité Linéarisée

$v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ déformation.

Energie

$$\int_{\Omega} V(x, Dv^T Dv - Id) dx$$

Déplacement $u = v - Id$

$$\text{Tenseur de Saint-Venant : } \frac{1}{2}(Dv^T Dv - Id) = \underbrace{\frac{1}{2}(Du + Du^T)}_{e(u) \text{ (gradient symétrique)}} + \frac{1}{2}Du^T Du$$

Elasticité Linéarisée

$v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ déformation.

Energie

$$\int_{\Omega} V(x, Dv^T Dv - Id) dx$$

Déplacement $u = v - Id$

$$\text{Tenseur de Saint-Venant : } \frac{1}{2}(Dv^T Dv - Id) = \underbrace{\frac{1}{2}(Du + Du^T)}_{e(u) \text{ (gradient symétrique)}} + \frac{1}{2}Du^T Du$$

$$E(u) = e(u) + \frac{1}{2}Du^T Du$$

Elasticité Linéarisée

$v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ déformation.

Energie

$$\int_{\Omega} V(x, Dv^T Dv - Id) dx$$

Déplacement $u = v - Id$

$$\text{Tenseur de Saint-Venant : } \frac{1}{2}(Dv^T Dv - Id) = \underbrace{\frac{1}{2}(Du + Du^T)}_{e(u) \text{ (gradient symétrique)}} + \frac{1}{2}Du^T Du$$

$$E(u) = e(u) + \frac{1}{2}Du^T Du$$

Hypothèse des “petits déplacements”

$$E(\varepsilon u) = \varepsilon e(u) + \varepsilon^2 \frac{1}{2}Du^T Du$$

Elasticité Linéarisée

Energie linéarisée

$$E(u) = \int_{\Omega} \langle A(x)e(u), e(u) \rangle dx$$

Elasticité Linéarisée

Energie linéarisée

$$E(u) = \int_{\Omega} \langle A(x)e(u), e(u) \rangle dx$$

Cas particulier

$$E(u) = \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx$$

Elasticité Linéarisée

Energie linéarisée

$$E(u) = \int_{\Omega} \langle A(x)e(u), e(u) \rangle dx$$

Cas particulier

$$E(u) = \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx$$

Cas encore plus particulier “anti-plan” $u = (0, 0, w)$

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx$$

Postulat de Griffith (Rupture Fragile)

L'énergie de dissipation produite par une fissure est proportionnelle à sa mesure de surface

Postulat de Griffith (Rupture Fragile)

L'énergie de dissipation produite par une fissure est proportionnelle à sa mesure de surface

Energie de Griffith

$$F(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, Le Déplacement

$e(u) = \frac{1}{2}(Du + Du^T)$

$K \subset \Omega$ compact "La fissure"

Postulat de Griffith (Rupture Fragile)

L'énergie de dissipation produite par une fissure est proportionnelle à sa mesure de surface

Energie de Griffith

$$F(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, Le Déplacement

$e(u) = \frac{1}{2}(Du + Du^T)$

$K \subset \Omega$ compact "La fissure"

→ Modèle variationnel de propagation de fissure [Francfort-Marigot 98] (évolution quasi-statique de l'énergie de Griffith)

Postulat de Griffith (Rupture Fragile)

Energie de Griffith, cas anti-plan

$$F(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N$$

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$K \subset \Omega$ compact “La fissure”

Postulat de Griffith (Rupture Fragile)

Energie de Griffith, cas anti-plan

$$F(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N$$

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$K \subset \Omega$ compact “La fissure”

→ On retrouve la fonctionnelle de Mumford-Shah (de dimension N)

La fonctionnelle de Griffith

$$\min_{\substack{u \in LD(\Omega \setminus K, \mathbb{R}^N) \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega}} \text{ et } K \in \mathcal{K} \quad G(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

La fonctionnelle de Griffith

$$\min_{\substack{u \in LD(\Omega \setminus K, \mathbb{R}^N) \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega}} \text{ et } K \in \mathcal{K} \quad G(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$



La fonctionnelle de Griffith

$$\min_{\substack{u \in LD(\Omega \setminus K, \mathbb{R}^N) \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega}} \text{ et } K \in \mathcal{K} \quad G(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

La fonctionnelle de Griffith

$$\min_{\substack{u \in LD(\Omega \setminus K, \mathbb{R}^N) \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega}} \text{ et } K \in \mathcal{K} \quad G(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

Encore une longue histoire (mais récente)....

La fonctionnelle de Griffith

$$\min_{\substack{u \in LD(\Omega \setminus K, \mathbb{R}^N) \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega}} \text{ et } K \in \mathcal{K} \quad G(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

Encore une longue histoire (mais récente)....

- existence faible : [Dal Maso 2013] Relaxation dans SBD

La fonctionnelle de Griffith

$$\min_{\substack{u \in LD(\Omega \setminus K, \mathbb{R}^N) \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega}} \text{ et } K \in \mathcal{K} \quad G(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

Encore une longue histoire (mais récente)....

- existence faible : [Dal Maso 2013] Relaxation dans SBD
- existence forte [Chambolle, Crismale 2018] (voir aussi [Conti, Focardi, Iurlano 18])

La fonctionnelle de Griffith

$$\min_{\substack{u \in LD(\Omega \setminus K, \mathbb{R}^N) \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega}} \text{ et } K \in \mathcal{K} \quad G(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

Encore une longue histoire (mais récente)....

- existence faible : [Dal Maso 2013] Relaxation dans SBD
- existence forte [Chambolle, Crismale 2018] (voir aussi [Conti, Focardi, Iurlano 18])
- régularité ?

La fonctionnelle de Griffith

$$\min_{\substack{u \in LD(\Omega \setminus K, \mathcal{R}^N) \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega}} \text{ et } K \in \mathcal{K} \quad G(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K)$$

Théorème [Babadjian, L., Iurlano] (JEMS, à paraître)

Soit $N = 2$ et soit (u, K) un minimiseur **connexe** de la fonctionnelle de Griffith. Alors K est $C^{1,\alpha}$, \mathcal{H}^1 -p.p.

La fonctionnelle de Griffith

Théorème [L., Labourie] Preprint 2021

Soit $N = 2$ et soit (u, K) un minimiseur **connexe** de la fonctionnelle de Griffith.
Alors $K_{sing} \subset K$ est de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 1.

La fonctionnelle de Griffith

Théorème [L., Labourie] Preprint 2021

Soit $N = 2$ et soit (u, K) un minimiseur **connexe** de la fonctionnelle de Griffith. Alors $K_{sing} \subset K$ est de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 1.

Travail en cours [L., Labourie] (ε_0 -régularité en dimension N)

Soit N quelconque et soit (u, K) un **presque**-minimiseur de la fonctionnelle de Griffith. Alors si

- 1 $\frac{1}{r} \int_{B(x,r)} |e(u)|^2 dx \leq \varepsilon_0$
- 2 $K \cap B(x, r)$ est ε_0 -proche d'un plan
- 3 K sépare $B(x, r)$ en au moins 2 gros morceaux

Alors $K \cap B(x, r/2)$ est $C^{1,\alpha}$.

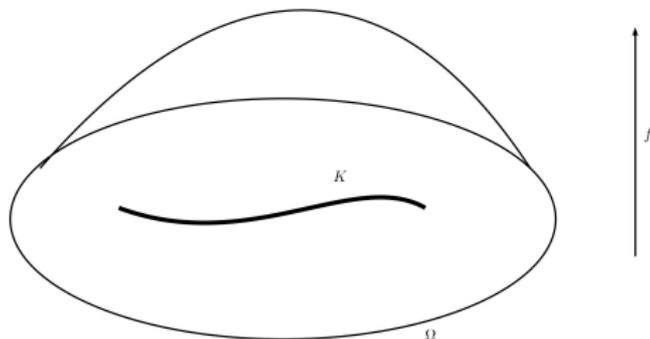
Sommaire

- I) Ensembles presque minimaux
- II) La fonctionnelle de Mumford-Shah
- III) La fonctionnelle de Griffith
- IV) Problèmes de compliance optimale
- V) Problème de compliance optimale d'ordre 2

Le problème de “membrane collée”

(le “Glue-problem” de Buttazzo) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$



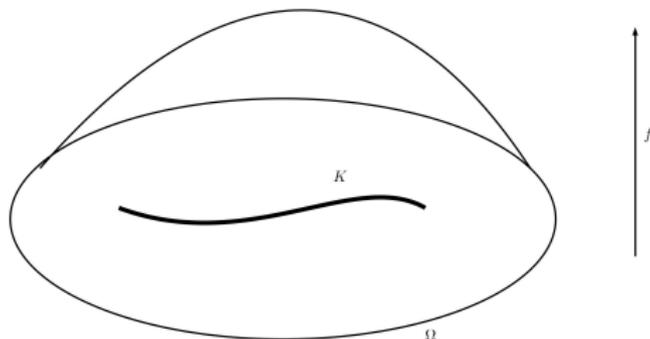
Le problème de “membrane collée”

(le “Glue-problem” de Buttazzo) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

Alors on considère

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{C}(K) := \int_{\Omega} |\nabla v_K|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$



Le problème de “membrane collée”

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{C}(K) := \int_{\Omega} |\nabla v_K|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Ressemble à version “Dirichlet” de Mumford-Shah... mais...

Le problème de “membrane collée”

Soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

v_K minimise

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - 2 \int_{\Omega} v f dx$$

Le problème de “membrane collée”

Soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

v_K minimise

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - 2 \int_{\Omega} v f dx = - \int_{\Omega} v_K f = - \int_{\Omega} |\nabla v_K|^2$$

Le problème de “membrane collée”

$$\min_K \mathcal{C}(K) = \min_K \max_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} vf - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème de compliance optimale (membrane collée)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine C^1 et $f \in L^p(\Omega)$ avec $p > 2$, alors toute solution Σ possède les propriétés suivantes.

Theorem [Chambolle - Lamboley - L. - Stepanov (2016)]

PART I: QUALITATIVE PROPERTIES.

- (i) Σ contains no loops (homeomorphic images of S^1), hence $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ is connected.
- (ii) Σ is Ahlfors regular.
- (iii) Σ is a chord-arc set, i.e. it satisfies $d_{\Sigma}(x, y) \leq C|x - y|$, for some constant $C > 0$, where d_{Σ} denotes the geodesic distance in Σ .

Problème de compliance optimale (membrane collée)

Theorem [Chambolle - Lamboley - L. - Stepanov (2016)]

PART II: REGULARITY.

- (iv) Σ consists of a finite number of embedded curves, possibly intersecting at “triple points” where the curves are meeting by 3 at 120 degrees angles. In particular, it has finite number of endpoints and finite number of branching points, all of which are triple points as described.
- (v) Such curves are locally $C^{1,\alpha}$ regular for some $\alpha \in (0, 1)$ inside Ω and possibly touch $\partial\Omega$ only tangentially. Moreover, if Ω is a convex domain, then they are locally $C^{1,\alpha}$ in $\bar{\Omega}$.
- (vi) If, further, $f \in H^1(\Omega)$ (so that automatically $f \in L^p(\Omega)$ for any $p > 2$), then the curves of Σ are locally $C^{2,\alpha}$ inside Ω for any $\alpha \in (0, 1)$, and if f , moreover, is locally $C^{k,\beta}$ regular for some $k \in \mathbb{N}$ and $\beta \in (0, 1)$ then the latter curves are locally $C^{k+3,\beta}$. If furthermore f is analytic, then the curves are locally analytic.

Problème de compliance optimale (membrane collée)

Theorem [Chambolle - Lamboley - L. - Stepanov (2016)]

PART II: REGULARITY.

- (iv) Σ consists of a finite number of embedded curves, possibly intersecting at “triple points” where the curves are meeting by 3 at 120 degrees angles. In particular, it has finite number of endpoints and finite number of branching points, all of which are triple points as described.
- (v) Such curves are locally $C^{1,\alpha}$ regular for some $\alpha \in (0, 1)$ inside Ω and possibly touch $\partial\Omega$ only tangentially. Moreover, if Ω is a convex domain, then they are locally $C^{1,\alpha}$ in $\bar{\Omega}$.
- (vi) If, further, $f \in H^1(\Omega)$ (so that automatically $f \in L^p(\Omega)$ for any $p > 2$), then the curves of Σ are locally $C^{2,\alpha}$ inside Ω for any $\alpha \in (0, 1)$, and if f , moreover, is locally $C^{k,\beta}$ regular for some $k \in \mathbb{N}$ and $\beta \in (0, 1)$ then the latter curves are locally $C^{k+3,\beta}$. If furthermore f is analytic, then the curves are locally analytic.

Idées principales pour (v) PART II

Si Σ' est un compétiteur dans la boule B_r alors

$$\mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_r) \leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + \int_{\Omega} u_{\Sigma'} f dx - \int_{\Omega} u_{\Sigma} f dx$$

Idées principales pour (v) PART II

Si Σ' est un compétiteur dans la boule B_r alors

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_r) &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + \int_{\Omega} u_{\Sigma'} f dx - \int_{\Omega} u_{\Sigma} f dx \\ &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + C \int_{B_{2r}} |\nabla u_{\Sigma'}|^2 dx\end{aligned}$$

Idées principales pour (v) PART II

Si Σ' est un compétiteur dans la boule B_r alors

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_r) &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + \int_{\Omega} u_{\Sigma'} f dx - \int_{\Omega} u_{\Sigma} f dx \\ &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + C \int_{B_{2r}} |\nabla u_{\Sigma'}|^2 dx \\ &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + Cr\omega_{\Sigma}(x, r).\end{aligned}$$

Idées principales pour (v) PART II

Si Σ' est un compétiteur dans la boule B_r alors

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_r) &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + \int_{\Omega} u_{\Sigma'} f dx - \int_{\Omega} u_{\Sigma} f dx \\ &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + C \int_{B_{2r}} |\nabla u_{\Sigma'}|^2 dx \\ &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + Cr\omega_{\Sigma}(x, r).\end{aligned}$$

$$\omega_{\Sigma}(x, r) = \max_{\Sigma \Delta \Sigma' \subset B_r} \frac{1}{r} \int_{B_{2r}} |\nabla u_{\Sigma'}|^2 dx.$$

Idées principales pour (v) PART II

Si Σ' est un compétiteur dans la boule B_r alors

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_r) &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + \int_{\Omega} u_{\Sigma'} f dx - \int_{\Omega} u_{\Sigma} f dx \\ &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + C \int_{B_{2r}} |\nabla u_{\Sigma'}|^2 dx \\ &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + Cr\omega_{\Sigma}(x, r).\end{aligned}$$

$$\omega_{\Sigma}(x, r) = \max_{\Sigma \Delta \Sigma' \subset B_r} \frac{1}{r} \int_{B_{2r}} |\nabla u_{\Sigma'}|^2 dx.$$

On montre que $\omega_{\Sigma}(x, r) \lesssim r^{1+\alpha}$ tant que $\Sigma \cap B_r$ reste suffisamment "plat".
 \implies " ε -regularity theorem" $\implies C^{1,\alpha} \mathcal{H}^1$ presque partout....

The optimal compliance problem

Theorem [Chambolle - Lamboley - L. - Stepanov (2016)]

PART II: REGULARITY.

- (iv) Σ consists of a finite number of embedded curves, possibly intersecting at “triple points” where the curves are meeting by 3 at 120 degrees angles. In particular, it has finite number of endpoints and finite number of branching points, all of which are triple points as described.
- (v) Such curves are locally $C^{1,\alpha}$ regular for some $\alpha \in (0, 1)$ inside Ω and possibly touch $\partial\Omega$ only tangentially. Moreover, if Ω is a convex domain, then they are locally $C^{1,\alpha}$ in $\bar{\Omega}$.
- (vi) If, further, $f \in H^1(\Omega)$ (so that automatically $f \in L^p(\Omega)$ for any $p > 2$), then the curves of Σ are locally $C^{2,\alpha}$ inside Ω for any $\alpha \in (0, 1)$, and if f , moreover, is locally $C^{k,\beta}$ regular for some $k \in \mathbb{N}$ and $\beta \in (0, 1)$ then the latter curves are locally $C^{k+3,\beta}$. If furthermore f is analytic, then the curves are locally analytic.

Outil principal pour (iv) Part II: Blow-up

limite de blow-up: $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{r}} u(r(x - x_0) + x_0)$ et $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (K - x_0)$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \max_{u \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \max_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} vf - \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \max_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - \left(\sup_{\Phi \in L^2} 2 \int_{\Omega} \langle \nabla v, \Phi \rangle dx - \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \sup_{\Phi \in L^2} \sup_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - 2 \int_{\Omega} \langle \nabla v, \Phi \rangle dx - \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \sup_{\Phi \in L^2} \sup_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f + 2 \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\Phi) dx - \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \sup_{\Phi \in L^2} \sup_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v(f + \operatorname{div} \Phi) dx - \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \sup_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} - \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ était simplement connexe, alors:

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ était simplement connexe, alors:

en notant Ψ_f la solution de $-\Delta \Psi_f = f$ dans Ω , nous aurions:

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ était simplement connexe, alors:

en notant Ψ_f la solution de $-\Delta \Psi_f = f$ dans Ω , nous aurions:

$$\operatorname{div}(\Phi - \nabla \Psi_f) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ était simplement connexe, alors:

en notant Ψ_f la solution de $-\Delta \Psi_f = f$ dans Ω , nous aurions:

$$\operatorname{div}(\Phi - \nabla \Psi_f) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \Phi - \nabla \Psi_f = \nabla^\perp v \text{ pour } v \in H^1(\Omega \setminus K)$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ était simplement connexe, alors:

en notant Ψ_f la solution de $-\Delta \Psi_f = f$ dans Ω , nous aurions:

$$\operatorname{div}(\Phi - \nabla \Psi_f) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \Phi - \nabla \Psi_f = \nabla^{\perp} v \text{ pour } v \in H^1(\Omega \setminus K)$$

$$\Rightarrow \min_{\Phi} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx = \min_{v \in H^1(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega \setminus K} |\nabla^{\perp} v + \nabla \Psi_f|^2 dx$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ était simplement connexe, alors:

en notant Ψ_f la solution de $-\Delta \Psi_f = f$ dans Ω , nous aurions:

$$\operatorname{div}(\Phi - \nabla \Psi_f) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \Phi - \nabla \Psi_f = \nabla^{\perp} v \text{ pour } v \in H^1(\Omega \setminus K)$$

$$\Rightarrow \min_{\Phi} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx = \min_{v \in H^1(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega \setminus K} |\nabla^{\perp} v + \nabla \Psi_f|^2 dx$$

\Rightarrow

$$\min_K \min_{v \in H^1(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega} |\nabla v - \nabla^{\perp} \Psi_f|^2 dx + \mathcal{H}^1(K)$$

\rightarrow similaire à la fonctionnelle de Mumford-Shah...

(“presque minimiseur” de Mumford-Shah...)

Variante: le problème de p -compliance optimale

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta_p v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

Variante: le problème de p -compliance optimale

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta_p v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

bien posé pour $p > N - 1$.

Variante: le problème de p -compliance optimale

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta_p v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

bien posé pour $p > N - 1$.

$$\min_K C_p(K) = \int_{\Omega} |\nabla v_K|^p dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Variante: le problème de p -compliance optimale

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta_p v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

bien posé pour $p > N - 1$.

$$\min_K C_p(K) = \int_{\Omega} |\nabla v_K|^p dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Frontière libre K de dimension 1 dans \mathbb{R}^N

Opérateur non linéaire $\Delta_p = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$

Variante: le problème de p -compliance optimale

Théorème [Bohdan Bulanyi, Thèse (2021)]

Soit K un minimiseur de p -Compliance en dimension $N \geq 2$.

Alors K est $C^{1,\alpha}$, \mathcal{H}^1 -p.p.

Variante: le problème de p -compliance optimale

Théorème [Bohdan Bulanyi, Thèse (2021)]

Soit K un minimiseur de p -Compliance en dimension $N \geq 2$.

Alors K est $C^{1,\alpha}$, \mathcal{H}^1 -p.p.

Remarque: pas de problème dual de type discontinuité libre...

Sommaire

I) (Introduction) Régularité des ensembles presque minimaux

II) La fonctionnelle de Mumford-Shah

III) La fonctionnelle de Griffith

IV) Problèmes de compliance optimale

V) Problème de compliance optimale d'ordre 2

Un modèle de plaque mince

Discussions en cours avec *Reza Pakzad* (Prof Invité à l'UL 2022)



$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega_h = \Omega \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right].$$

$$v : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Déformation d'une plaque mince sous l'effet d'une force $F_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$

Un modèle de plaque mince

Discussions en cours avec *Reza Pakzad* (Prof Invité à l'UL 2022)



$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega_h = \Omega \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right].$$

$$v : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Déformation d'une plaque mince sous l'effet d'une force $F_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$

Un modèle de plaque mince

Discussions en cours avec *Reza Pakzad* (Prof Invité à l'UL 2022)



$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega_h = \Omega \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right].$$

$$v : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Déformation d'une plaque mince sous l'effet d'une force $F_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$

Energie :

$$E_h := \min_{v : v=Id \text{ sur } \Gamma \subset \partial\Omega \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]} \int_{\Omega_h} W(Dv) \, dx - \int_{\Omega_h} F_h \cdot v \, dx$$

Un modèle de plaque mince

Discussions en cours avec *Reza Pakzad (Prof Invité à l'UL 2022)*



$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega_h = \Omega \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right].$$

$$v : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Déformation d'une plaque mince sous l'effet d'une force $F_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$

Energie :

$$E_h := \min_{v : v=Id \text{ sur } \Gamma \subset \partial\Omega \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]} \int_{\Omega_h} W(Dv) \, dx - \int_{\Omega_h} F_h \cdot v \, dx$$

Différents régimes possibles dans la limite $h \rightarrow 0$
(littérature très abondante, math ou physique).

Un modèle de plaque mince

$$\int_{\Omega} W(Dv_h) dx \simeq h \int_{\Omega} |Dv_h^T Dv_h - Id|^2 dx + h^3 \int_{\Omega} |\Pi(v_h)|^2 dx$$

Un modèle de plaque mince

$$\int_{\Omega} W(Dv_h) dx \simeq h \int_{\Omega} |Dv_h^T Dv_h - Id|^2 dx + h^3 \int_{\Omega} |\Pi(v_h)|^2 dx$$

(Fonctionnelle de Föpple-von Kármán)

Un modèle de plaque mince

- $E_h \simeq h$ (proportionnel au volume de $\Omega \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$)

Un modèle de plaque mince

- $E_h \simeq h$ (proportionnel au volume de $\Omega \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$)
 $h \rightarrow 0$: Modèle de Membrane 2D classique [Le Dret-Raoult (1995)]

Un modèle de plaque mince

- 1 $E_h \simeq h$ (proportionnel au volume de $\Omega \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$)
 $h \rightarrow 0$: Modèle de Membrane 2D classique [Le Dret-Raoult (1995)]
- 2 $E_h \simeq h^3$ (phénomène de flexion, courbure)

Un modèle de plaque mince

- 1 $E_h \simeq h$ (proportionnel au volume de $\Omega \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$)
 $h \rightarrow 0$: Modèle de Membrane 2D classique [Le Dret-Raoult (1995)]
- 2 $E_h \simeq h^3$ (phénomène de flexion, courbure)
 $h \rightarrow 0$: le minimiseur v_h converge vers une **isométrie** $\nabla v^T \nabla v = Id$, v est indépendant de x_3 et l'énergie converge vers

$$\int_{\Omega} |\Pi(v)|^2 dx \quad (\Pi = (\nabla v)^T \nabla b \quad \text{où } b = \frac{\partial v}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial v}{\partial x_2} = \nu)$$

[Friesecke, James, Müller 2002]

Un modèle de plaque mince

$E_h \ll h^3$ (phénomène de flexion à l'ordre supérieur) exemple : $E_h \simeq h^6$

Un modèle de plaque mince

$E_h \ll h^3$ (phénomène de flexion à l'ordre supérieur) exemple : $E_h \simeq h^6$
 $h \rightarrow 0$: le minimiseur v_h converge vers : v **isométrie** $\nabla v^T \nabla v = Id$,

Un modèle de plaque mince

$E_h \ll h^3$ (phénomène de flexion à l'ordre supérieur) exemple : $E_h \simeq h^6$
 $h \rightarrow 0$: le minimiseur v_h converge vers : v **isométrie** $\nabla v^T \nabla v = Id$,
indépendant de x_3

Un modèle de plaque mince

$E_h \ll h^3$ (phénomène de flexion à l'ordre supérieur) exemple : $E_h \simeq h^6$
 $h \rightarrow 0$: le minimiseur v_h converge vers : v **isométrie** $\nabla v^T \nabla v = Id$,
indépendant de x_3
et de plus $\Pi(v) = 0$.

Un modèle de plaque mince

$E_h \ll h^3$ (phénomène de flexion à l'ordre supérieur) exemple : $E_h \simeq h^6$
 $h \rightarrow 0$: le minimiseur v_h converge vers : v **isométrie** $\nabla v^T \nabla v = Id$,
indépendant de x_3
et de plus $\Pi(v) = 0$.

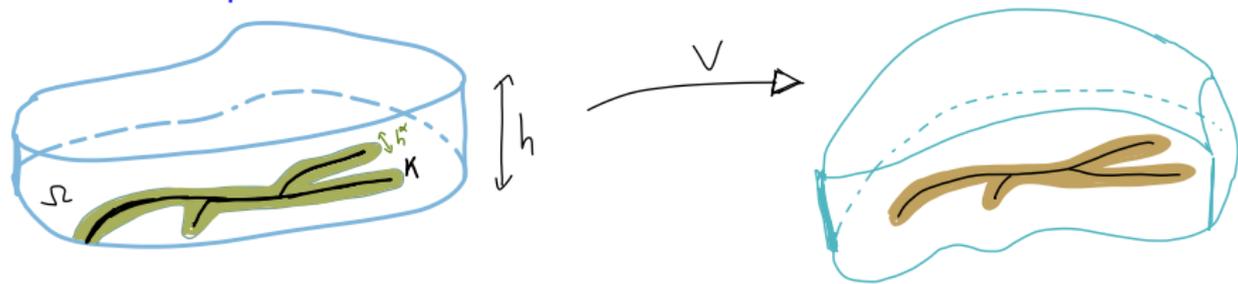
On considère alors $\tilde{v}_h := \frac{1}{h^{3/2}}(v_h - v)$ Converge vers $(0, 0, w)$ et l'énergie
(normalisée) converge vers

$$\int_{\Omega} |\nabla^2 w|^2 dx$$

Modèle de la “plaque mince collée”

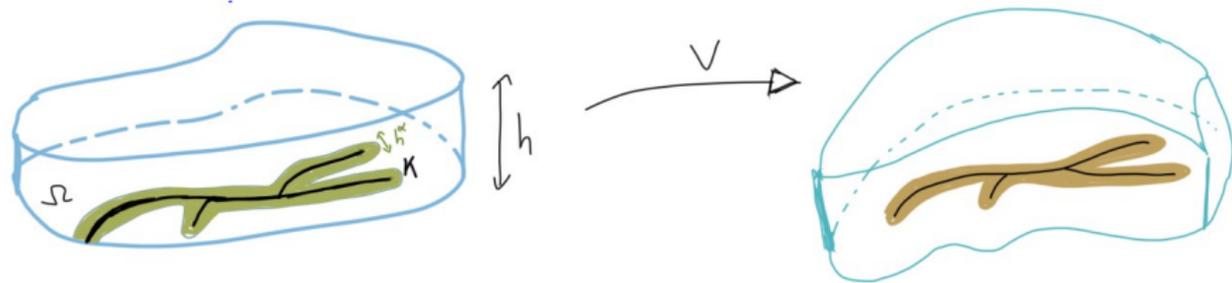
Modèle de la “plaque mince collée” (travail en cours avec Reza Pakzad)

Soit $K \subset \Omega$ un trait de colle 1D, $K_h = \{x' \mid \text{dist}(x', K) \leq h^\alpha\} \times \{0\}$
trait de colle “épaissi”.



Modèle de la “plaque mince collée”

Soit $K \subset \Omega$ un trait de colle 1D, $K_h = \{x' \mid \text{dist}(x', K) \leq h^\alpha\} \times \{0\}$
trait de colle “épaissi”.



Etudier la Γ -limite en $h \rightarrow 0$ de

$$E_h := \min_{v : v=Id \text{ sur } K_h} \int_{\Omega_h} W(Dv) dx - \int_{\Omega_h} F_h \cdot v dx$$

Modèle de la “plaque mince collée”

Dans le régime $E_h \simeq h \rightarrow$ Problème de membrane classique avec “trait de colle”.

Modèle de la “plaque mince collée”

Dans le régime $E_h \simeq h \rightarrow$ Problème de membrane classique avec “trait de colle”.

Dans le régime $E_h \simeq h^3 \rightarrow$ Problème d'ordre 2 sous contrainte d'isométrie.

Modèle de la “plaque mince collée”

Dans le régime $E_h \simeq h \rightarrow$ Problème de membrane classique avec “trait de colle”.

Dans le régime $E_h \simeq h^3 \rightarrow$ Problème d'ordre 2 sous contrainte d'isométrie.

Dans le régime $E_h \simeq h^6 \rightarrow$ Problème de compliance “bi-harmonique”

Le problème de “membrane collée” biharmonique

Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta^2 v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^2(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

Le problème de “membrane collée” biharmonique

Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta^2 v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^2(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

Alors on considère

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{C}(K) := \int_{\Omega} |\nabla^2 v_K|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \max_{u \in H_0^2(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - \int_{\Omega} |\nabla^2 v|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \max_{v \in H_0^2(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - \left(\int_{\Omega} |\nabla^2 v|^2 dx \right) \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \max_{v \in H_0^2(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - \left(\sup_{\Phi \in L^2} 2 \int_{\Omega} \langle \nabla^2 v, \Phi \rangle dx - \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \sup_{\Phi \in L^2} \sup_{v \in H_0^2(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - 2 \int_{\Omega} \langle \nabla^2 v, \Phi \rangle dx - \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \sup_{\Phi \in L^2} \sup_{v \in H_0^2(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f + 2 \int_{\Omega} v \operatorname{div} \operatorname{div}(\Phi) \, dx - \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \sup_{\Phi \in L^2} \sup_{v \in H_0^2(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v(f + \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi) dx - \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$$\min_K \mathcal{C}(K) =$$

$$\min_K \sup_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} - \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ est simplement connexe, alors:

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ est simplement connexe, alors:

en notant φ la solution de $-\Delta \varphi = f$ dans Ω et $G = \varphi Id$, nous aurions:

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ est simplement connexe, alors:

en notant φ la solution de $-\Delta \varphi = f$ dans Ω et $G = \varphi Id$, nous aurions:

$\operatorname{div} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0$ dans $\Omega \setminus K$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ est simplement connexe, alors:

en notant φ la solution de $-\Delta \varphi = f$ dans Ω et $G = \varphi Id$, nous aurions:

$$\operatorname{div} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\Phi + G) = \nabla^{\perp} v$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ est simplement connexe, alors:

en notant φ la solution de $-\Delta \varphi = f$ dans Ω et $G = \varphi Id$, nous aurions:

$$\operatorname{div} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\Phi + G) = \nabla^{\perp} v$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ est simplement connexe, alors:

en notant φ la solution de $-\Delta \varphi = f$ dans Ω et $G = \varphi Id$, nous aurions:

$$\operatorname{div} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\Phi + G) = \nabla^{\perp} v$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{curl}(\operatorname{Com}(\Phi + G)) = 0$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ est simplement connexe, alors:

en notant φ la solution de $-\Delta \varphi = f$ dans Ω et $G = \varphi Id$, nous aurions:

$$\operatorname{div} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\Phi + G) = \nabla^\perp v$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{curl}(\operatorname{Com}(\Phi + G)) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi + G = e(u)$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ est simplement connexe, alors:

en notant φ la solution de $-\Delta \varphi = f$ dans Ω et $G = \varphi Id$, nous aurions:

$$\operatorname{div} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\Phi + G) = \nabla^\perp v$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{curl}(\operatorname{Com}(\Phi + G)) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi + G = e(u)$$

$$\Rightarrow \min_{\Phi} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx = \min_{v \in LD(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega \setminus K} |e(v) - G|^2 dx$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ est simplement connexe, alors:

en notant φ la solution de $-\Delta \varphi = f$ dans Ω et $G = \varphi Id$, nous aurions:

$$\operatorname{div} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\Phi + G) = \nabla^\perp v$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{curl}(\operatorname{Com}(\Phi + G)) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi + G = e(v)$$

$$\Rightarrow \min_{\Phi} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx = \min_{v \in LD(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega \setminus K} |e(v) - G|^2 dx$$

\Rightarrow

$$\min_K \min_{v \in LD(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega} |e(v) - G|^2 dx + \mathcal{H}^1(K)$$

\rightarrow similaire à la fonctionnelle de Griffith...

(“presque minimiseur” de Griffith...)

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Si $\Omega \setminus K$ est simplement connexe, alors:

en notant φ la solution de $-\Delta \varphi = f$ dans Ω et $G = \varphi Id$, nous aurions:

$$\operatorname{div} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\Phi + G) = \nabla^\perp v$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{div}(\Phi + G) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} \operatorname{curl}(\operatorname{Com}(\Phi + G)) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi + G = e(u)$$

$$\Rightarrow \min_{\Phi} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx = \min_{v \in LD(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega \setminus K} |e(v) - G|^2 dx$$

\Rightarrow

$$\min_K \min_{v \in LD(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega} |e(v) - G|^2 dx + \mathcal{H}^1(K)$$

\rightarrow similaire à la fonctionnelle de Griffith...

(“presque minimiseur” de Griffith...)

Résultat attendu (travail en cours): les minimiseurs sont C^1 , \mathcal{H}^1 presque partout.

Merci pour votre attention!