Propagation dans des environnements à hétérogénéité mobile

Thomas GILETTI

Université de Lorraine

JEDP de l'IECL - 2022

Introduction

Réaction hétérogène

Diffusion hétérogène

Modèles à hétérogénéité mobile

- Pour $c_{het} \geq 0$ on considère l'équation de **réaction-diffusion**

$$\partial_t u = d(x - c_{het} t)\partial_x^2 u + f(x - c_{het} t, u), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

- La solution $u(t,x) \geq 0$ décrit typiquement la densité d'une population dont
  - le taux de diffusion d,
  - le taux de reproduction $f(\cdot, u)$,

  dépendent de la variable mobile $x - c_{het} t$.

Quelques exemples

- Sous l'effet d'un changement climatique, l'environnement favorable se déplace à la vitesse c_{het}:

$$\partial_t u = d\partial_x^2 u + f(x - c_{het} t, u),$$

avec

$$f(x - c_{het} t, u) = \begin{cases} ru\left(1 - \frac{u}{K}\right) \text{ si } |x - c_{het} t| \leq L, \\ -u \text{ si} |x - c_{het} t| > L. \end{cases}$$

Quelques exemples

- Lors de l'invasion d'un nouveau prédateur:

$$\begin{cases} \partial_t u = d(v)\partial_x^2 u + ru\left(1-\frac{u}{K}\right) - \alpha uv, \\ \partial_t v = d(u)\partial_x^2 v + \beta uv - \gamma v. \end{cases}$$

qu'on peut approximer par un problème de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u = d(x-c_{het}t)\partial_x^2 u + f(x-c_{het}t, u), \\ v(t,x) = V(x-c_{het}t), \end{cases}$$

où V (donc d, f) est monotone en $x - c_{het}$.

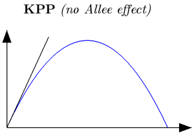
A propos de l'équation homogène

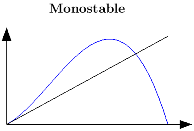
- Considérons l'équation de réaction-diffusion **homogène**

$$\partial_t u = d\partial_x^2 u + g(u),$$

avec g **monostable** (éventuellement KPP), i.e.

$$g(0) = g(1) = 0, \quad g > 0 \text{ dans } (0,1).$$





A propos de l'équation homogène

- **Théorème** (Aronson-Weinberger, Kolmogorov-Petrovski-Piskunov) *Il existe* $c^* > 0$ *telle que pour toute donnée initiale positive à support compact, alors la solution se* ***propage à vitesse*** c^*, *i.e.*

$$\forall c < c^*, \qquad \lim_{t \to +\infty} \sup_{|x| < ct} |u(t,x) - 1| = 0,$$

$$\forall c > c^*, \qquad \lim_{t \to +\infty} \sup_{|x| > ct} u(t,x) = 0.$$

Autrement dit, les lignes de niveau de la solution sont situées en $x = c^* t + o(t)$ quand $t \to +\infty$.

A propos de l'équation homogène

- Si de plus $g(u) \leq g'(0)u$ (cas KPP), alors

$$c^* = 2\sqrt{dg'(0)}.$$

Sinon on a seulement

$$c^* \geq 2\sqrt{dg'(0)}.$$

Par exemple, si $g(u) = u(1-u)(1+au)$, alors

$$c_a^* = \begin{cases} 2\sqrt{d} & \text{si } 0 \leq a \leq 2, \\ \sqrt{\frac{2d}{a}} + \sqrt{\frac{ad}{2}} & \text{si } a > 2. \end{cases}$$

A propos de l'équation homogène

- La valeur $2\sqrt{dg'(0)}$ n'est rien d'autre que la vitesse de propagation des solutions de l'équation linéaire

$$\partial_t u = d\partial_x^2 u + g'(0)u,$$

dont les solutions sont

$$u(t,x) = \frac{e^{g'(0)t}}{\sqrt{4\pi dt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4dt}} u_0(y)dy.$$

- La propagation peut-être "linéaire" (tirée) si $c^* = 2\sqrt{dg'(0)}$, ou "nonlinéaire" (poussée) si $c^* > 2\sqrt{dg'(0)}$.

Cas d'un terme de réaction hétérogène

- On s'intéresse d'abord à une **réaction hétérogène**:

$$\partial_t u = d\partial_x^2 u + f(x - c_{het} t, u),$$

i.e. la diffusion est constante.

- Variété de phénomènes selon:
  - la dépendance en u (monostable, KPP, bistable...);
  - la dépendance en $x - c_{het} t$ (zone favorable bornée ou non, monotonie ou non...).

Réaction hétérogène KPP - zone favorable bornée

- Supposons que $d = cstt$ et

$$f(x - c_{het}t, u) = \begin{cases} g(u) \text{ de type KPP} & \text{si } |x - c_{het}t| \leq L, \\ -u & \text{si } |x - c_{het}t| > L. \end{cases}$$

- **Théorème** (Berestycki et al): *Il existe* $c^*(L) \in [0, 2\sqrt{dg'(0)})$ *telle que, si* u_0 *est à support compact, alors la solution:*
  - ***persiste*** *si* $0 \leq c_{het} < c^*(L)$, *i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \liminf_{t \to +\infty} u(t, x + c_{het}t) > 0.$$

  - ***s'éteint*** *si* $c_{het} \geq c^*(L)$, *i.e.*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) = 0.$$

Réaction hétérogène KPP - zone favorable bornée

- **Idée de la preuve de Berestycki et al:** on linéarise l'équation dans le repère mobile

$$\partial_t u = d\partial_z^2 u + c_{het}\partial_z u + \partial_z f(z,0)u,$$

puis en posant $u = e^{-\frac{c_{het}}{2d}z}v$,

$$\partial_t v = \mathcal{L}v - \frac{c_{het}^2}{4d}v := \left[d\partial_z^2 v + \partial_z f(z,0)v\right] - \frac{c_{het}^2}{4d}v.$$

Le comportement en temps grand est déterminé par le signe de

$$\lambda - \frac{c_{het}^2}{4d},$$

où λ est la "première" valeur propre de $\mathcal{L}$.

Réaction hétérogène KPP - zone favorable non bornée

- Supposons que $d = cstt$ et

$$f(x - c_{het}t, u) = \begin{cases} g(u) \text{ de type KPP} & \text{si } x - c_{het}t \geq 0, \\ -u & \text{si } x - c_{het}t < 0. \end{cases}$$

- **<u>Théorème</u>** (Li et al): *Si u_0 est à support compact, alors la solution:*
  - ***<u>persiste</u>*** *si* $0 \leq c_{het} < 2\sqrt{dg'(0)}$, *i.e.*

$$\liminf_{t \to +\infty} u(t, x + c_{het}t) > 0.$$

  - ***<u>s'éteint</u>*** *si* $c \geq 2\sqrt{dg'(0)}$, *i.e.*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) = 0,$$

Réaction hétérogène monostable - zone favorable bornée

- Supposons que $d = cstt$ et

$$f(x - c_{het}t, u) = \begin{cases} g(u) \text{ de type monostable} & \text{si } |x - c_{het}t| \leq L, \\ -u & \text{si } |x - c_{het}t| > L. \end{cases}$$

- **Théorème** (Bouhours-Nadin): *Il existe $0 \leq \underline{c}(L) \leq \overline{c}(L)$ telles que, si u_0 est à support compact, alors la solution:*
  - ***persiste*** *si $0 < c_{het} < \underline{c}(L)$, i.e.*

$$\liminf_{t \to +\infty} u(t, x + c_{het}t) > 0.$$

  - ***s'éteint*** *si $c_{het} > \overline{c}(L)$, i.e.*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) = 0.$$

- A-t-on $\underline{c} = \overline{c}$? Contre-exemples si zone favorable fractionnée!

Réaction hétérogène monostable - zone favorable non bornée

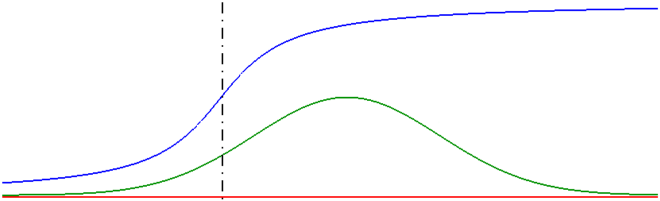
- Supposons que $d = cstt$ et
$$f(x-c_{het}t, u) = \begin{cases} g(u) \text{ de type monostable} & \text{si } x - c_{het}t \geq 0, \\ -u & \text{si } x - c_{het}t < 0. \end{cases}$$
- <u>**Théorème**</u> (Bouhours-G): *Si u_0 est à support compact, alors la solution:*
  - <u>***persiste***</u> *si $c_{het} < 2\sqrt{dg'(0)}$, i.e.*
  $$\liminf_{t\to+\infty} u(t, x + c_{het}t) > 0,$$
  - <u>***s'éteint***</u> *si $c_{het} > c^*$, i.e.*
  $$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} u(t,x) = 0,$$
  - <u>***persiste ou s'éteint***</u> *(selon la taille de u_0) dans l'intervalle intermédiaire $2\sqrt{dg'(0)} < c_{het} < c^*$.*

Réaction hétérogène monostable - zone favorable non bornée

- **Intuition:** une population de faible densité se propage seulement à vitesse $2\sqrt{dg'(0)}$ dans la zone favorable, mais une population de forte densité à vitesse c^*.
- **Idée de la preuve:** une bifurcation se produit autour de l'état 0 lorsque $c_{het} = 2\sqrt{dg'(0)}$:
  - un seul (donc isolé) état stationnaire strictement positif lorsque $c_{het} < 2\sqrt{dg'(0)}$;
  - un continuum d'états stationnaires positifs émerge de 0 qui devient "localement stable" lorsque $c_{het} \geq 2\sqrt{dg'(0)}$;
  - ce continuum inclut tous les états stationnaires positifs lorsque $c_{het} \geq c^*$.

Réaction hétérogène monostable - zone favorable non bornée

- Lorsque $c \in (2\sqrt{dg'(0)}, c^*)$:



En bleu le plus grand état stationnaire, en vert le plus grand état stationnaire du continuum.

Cas d'une diffusion hétérogène

- On s'intéresse à l'équation avec **diffusion hétérogène**:

$$\partial_t u = d(x - ct)\partial_x^2 u + u(1 - u).$$

- Remarques:
  - on ne cumule pas les deux effets (réaction homogène et même KPP);
  - forme de la diffusion discutable (typiquement, ne conserve pas la masse).

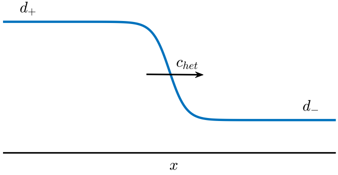
Cas d'une diffusion hétérogène

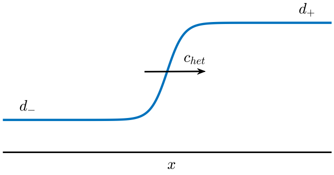
- On considérera deux cas différents:

$$d' \leq 0 \quad \text{ou} \quad d' \geq 0,$$

et dans tous les cas

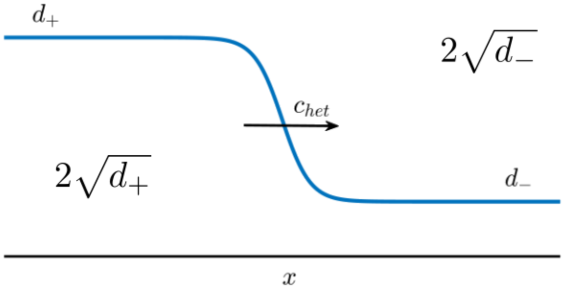
$$0 < d_- := \inf d < d_+ := \sup d < +\infty.$$





Cas d'une diffusion hétérogène: bonne heuristique

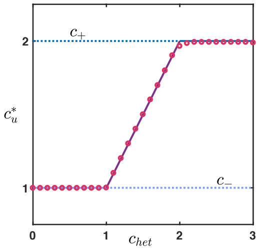
- Intuitivement:



Cas d'une diffusion hétérogène

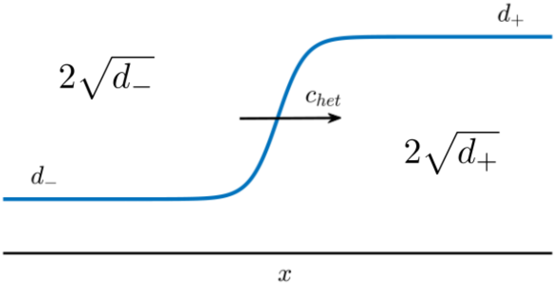
- **Théorème** (Faye-G-Holzer): *Si d est décroissante et u_0 à support compact, alors la solution se propage à la vitesse*

$$c^* = \begin{cases} 2\sqrt{d_+} & \text{si } c_{het} > 2\sqrt{d_+}, \\ c_{het} & \text{si } 2\sqrt{d_-} \leq c_{het} \leq 2\sqrt{d_+}, \\ 2\sqrt{d_-} & \text{si } c_{het} < 2\sqrt{d_-}. \end{cases}$$



Cas d'une diffusion hétérogène: mauvaise heuristique

- Intuitivement:



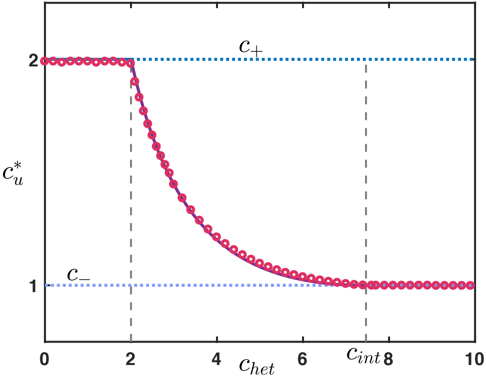
Cas d'une diffusion hétérogène

- **Théorème** (Faye-G-Holzer) *Si d est croissante et u_0 à support compact, alors la solution se propage à la vitesse*

$$c^* = \begin{cases} 2\sqrt{d_+} & \text{si } c_{het} < 2\sqrt{d_+}, \\ \frac{c_{het}}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d_-}{d_+}}\right) + \frac{2d_-}{c_{het}(1-\sqrt{1-\frac{d_-}{d_+}})} & \\ & \text{si } 2\sqrt{d_+} \leq c_{het} \leq 2\sqrt{d_+}\left(\sqrt{\frac{d_+}{d_-}} + \sqrt{\frac{d_+}{d_-} - 1}\right), \\ 2\sqrt{d_-} & \text{si } c_{het} > 2\sqrt{d_+}\left(\sqrt{\frac{d_+}{d_-}} + \sqrt{\frac{d_+}{d_-} - 1}\right). \end{cases}$$

Cas d'une diffusion hétérogène

- Tracé de cette vitesse en fonction de c_{het}:



Ici $d_+ = 1$, $d_- = 1/4$.

Cas d'une diffusion hétérogène

- **Idée de la preuve:** dans le cas KPP homogène, on peut retrouver la vitesse via l'équation linéaire

$$\partial_t u = d\partial_x^2 + u,$$

en cherchant une solution particulière exponentielle

$$e^{-\lambda(x-ct)}.$$

On obtient la relation de dispersion

$$d\lambda^2 - c\lambda + 1 = 0,$$

d'où

$$c \geq c^* = 2\sqrt{d}.$$

Cas d'une diffusion hétérogène

- Si $d(x - c_{het}t) = d_-$ pour $x << c_{het}t$ et $d(x - c_{het}t) = d_+$ pour $x >> c_{het}$, on a deux relations de dispersions. D'où un ansatz

$$\begin{cases} e^{-\lambda(x-ct)} & \text{si } x < c_{het}t, \\ e^{-\lambda(c_{het}-c)t} \times e^{-\mu(x-c_{het}t)} & \text{si } x > c_{het}t. \end{cases}$$

et les relations de dispersion

$$d_-\lambda^2 - c\lambda + 1 = 0,$$

$$d_+\mu^2 - c\mu + 1 + \lambda(c_{het} - c) = 0.$$

Cas d'une diffusion hétérogène

- Phénomène de **tirage non local**:
  - une hétérogénéité, même loin de la position du front, peut engendrer une décroissance plus lente à l'infini;
  - la vitesse de propagation dépend de la décroissance de la solution à l'infini et peut donc être accélérée.
- Déjà observé pour les systèmes compétitifs (Girardin-Lam, Holzer-Scheel).
- Intrinsèquement lié à la diffusion linéaire (propagation immédiate du support de la solution) et à la réaction KPP.

Cas de systèmes proie-prédateur

- On s'intéresse maintenant au système **proie-prédateur** avec **hétérogénéité mobile**:

$$\begin{cases} \partial_t u = d_1 \partial_x^2 u + r_1 u \left[\alpha(x - c_{het} t) - u - av\right], \\ \partial_t v = d_2 \partial_x^2 v + r_2 v \left[-1 + bu - v\right], \end{cases}$$

avec

$$\alpha(-\infty) < 0 < \alpha(+\infty), \quad \alpha' \geq 0.$$

- Remarques:
  - u et v décrivent respectivement les densités d'une proie et d'un prédateur;
  - seule la proie est impactée par le changement climatique.

Cas d'un système proie-prédateur

- Quelques vitesses pertinentes:

$$c^*_{prey} := 2\sqrt{d_1 \alpha(+\infty)},$$

vitesse max. de la proie (en zone favorable sans prédateurs);

$$c^*_{pred} := 2\sqrt{d_2 r_2 (b-1)},$$

vitesse max. du prédateur (en présence de proies $u \equiv 1$), et

$$c_{het}$$

vitesse de l'hétérogénéité.

Cas d'un système proie-prédateur

- **Théorème** (Choi-G-Guo): *Pour des données initiales u_0, v_0 à support compact:*
  - *si $c_{het} > c^*_{prey}$ alors les deux espèces s'éteignent:*
  $$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} u(t,x) + v(t,x) = 0;$$
  - *si $c^*_{pred} < c_{het} < c^*_{prey}$, alors la proie persiste et le prédateur s'éteint:*
  $$\liminf_{t\to+\infty} u(t, x + c_{het}t) > 0 = \lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} v(t,x);$$
  - *si $c_{het} < \min\{c^*_{prey}, c^*_{pred}\}$ alors les deux persistent:*
  $$\liminf_{t\to+\infty} \min\{u(t, x + c_{het}t), v(t, x + c_{het}t) > 0.$$

Merci de votre attention