

Etude des ondes progressives pour l'équation de Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky (KdV-KS)

Clémentine Courtès¹

Frédéric Rousset²

Journées EDP de l'IECL

29 mars 2022

¹IRMA (Strasbourg),

²LMO (Paris-Saclay)

Sommaire

- 1 L'équation de Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky
- 2 Les ondes progressives
- 3 Ondes progressives pour l'équation de KdV-Burgers
- 4 Ondes progressives pour l'équation de KdV avec diffusion d'ordre 4
- 5 Stabilité spectrale par analyse numérique

1 L'équation de Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky

- Écoulement d'un film mince sur un plan incliné
- Une équation diffusive-dispersive

2 Les ondes progressives

3 Ondes progressives pour l'équation de KdV-Burgers

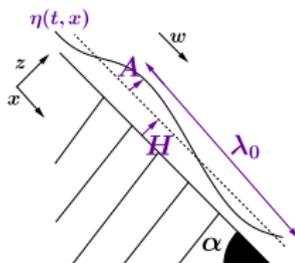
4 Ondes progressives pour KdV avec diffusion d'ordre 4

5 Stabilité spectrale par analyse numérique

1. Écoulement d'un film mince sur un plan incliné

Modélisation

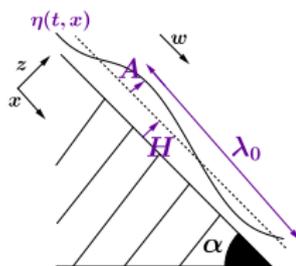
- Écoulement 1D selon x
- Surface libre : η avec $A = \max_{t,x} \eta(t,x)$
- Hauteur de l'eau au repos : H
- Longueur d'onde de la vague : λ_0
- Plan incliné d'un angle $\alpha \ll 1$



1. Écoulement d'un film mince sur un plan incliné

Modélisation

- Écoulement 1D selon x
- Surface libre : η avec $A = \max_{t,x} \eta(t,x)$
- Hauteur de l'eau au repos : H
- Longueur d'onde de la vague : λ_0
- Plan incliné d'un angle $\alpha \ll 1$



Film mince de faible amplitude

- Faible amplitude $\varepsilon_1 = A/H \ll 1$
- Faible profondeur $\varepsilon_2 = H^2/\lambda_0^2 \ll 1$
- Régime de Boussinesq $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$

Équation de Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky [Yu et al. '92][Johnson et al. '15]

En négligeant les termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon_1^{3/2})$, nous obtenons l'équation (KdV-KS)

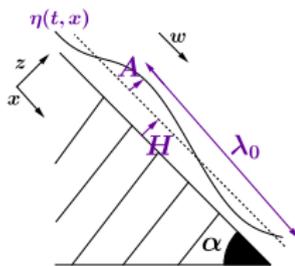
$$\partial_t v + c_1 \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) + c_2 \partial_x^2 v + c_3 \partial_x^3 v + c_4 \partial_x^4 v = 0, \quad (\text{KdV-KS})$$

avec $c_1 = \mathcal{O}(1)$, $c_2 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_2}(R - \frac{5}{4} \cotan(\alpha)))$, $c_3 = \mathcal{O}(\varepsilon_2)$ et $c_4 = \mathcal{O}(\varepsilon_2)$, avec R le nombre de Reynolds (=force d'inertie/force visqueuse).

1. Écoulement d'un film mince sur un plan incliné

Modélisation

- Écoulement 1D selon x
- Surface libre : η avec $A = \max_{t,x} \eta(t,x)$
- Hauteur de l'eau au repos : H
- Longueur d'onde de la vague : λ_0
- Plan incliné d'un angle $\alpha \ll 1$



Film mince de faible amplitude

- Faible amplitude $\varepsilon_1 = A/H \ll 1$
- Faible profondeur $\varepsilon_2 = H^2/\lambda_0^2 \ll 1$
- Régime de Boussinesq $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$

Équation de Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky [Yu et al. '92][Johnson et al. '15]

En négligeant les termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon_1^{3/2})$, nous obtenons l'équation **(KdV-KS)**

$$\partial_t v + c_1 \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) + c_2 \partial_x^2 v + c_3 \partial_x^3 v + c_4 \partial_x^4 v = 0, \quad (\text{KdV-KS})$$

avec $c_1 = \mathcal{O}(1)$, $c_2 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_2}(R - \frac{5}{4}\cotan(\alpha)))$, $c_3 = \mathcal{O}(\varepsilon_2)$ et $c_4 = \mathcal{O}(\varepsilon_2)$

Donc $c_2 \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow R^* = \frac{5}{4}\cotan(\alpha)$ le seuil d'instabilité



Figure: Roll waves (ou instabilités de rouleaux)

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Terme dispersif: $\partial_x^3 v$

- Ondes de longueurs d'onde différentes propagées à des vitesses différentes
- Séparation d'un train d'ondes en les différentes ondes qui le composent

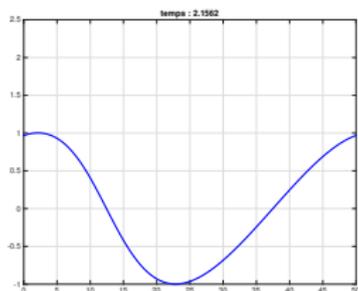


Figure: Oscillations dispersives

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Terme dispersif: $\partial_x^3 v$

- Ondes de longueurs d'onde différentes propagées à des vitesses différentes
- Séparation d'un train d'ondes en les différentes ondes qui le composent

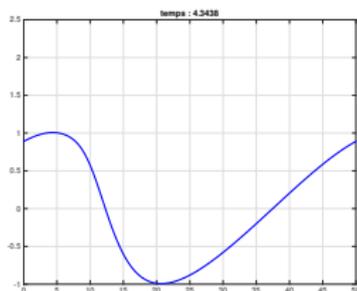


Figure: Oscillations dispersives

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Terme dispersif: $\partial_x^3 v$

- Ondes de longueurs d'onde différentes propagées à des vitesses différentes
- Séparation d'un train d'ondes en les différentes ondes qui le composent

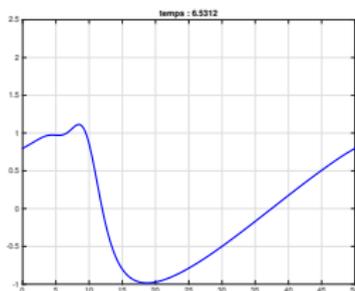


Figure: Oscillations dispersives

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Terme dispersif: $\partial_x^3 v$

- Ondes de longueurs d'onde différentes propagées à des vitesses différentes
- Séparation d'un train d'ondes en les différentes ondes qui le composent

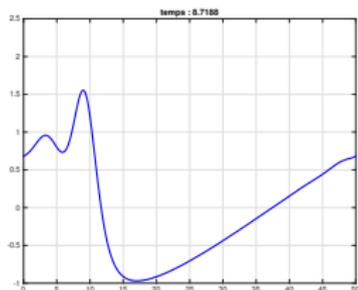


Figure: Oscillations dispersives

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Terme dispersif: $\partial_x^3 v$

- Ondes de longueurs d'onde différentes propagées à des vitesses différentes
- Séparation d'un train d'ondes en les différentes ondes qui le composent

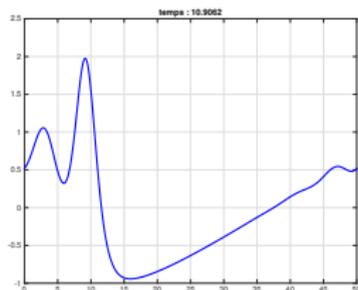


Figure: Oscillations dispersives

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Terme dispersif: $\partial_x^3 v$

- Ondes de longueurs d'onde différentes propagées à des vitesses différentes
- Séparation d'un train d'ondes en les différentes ondes qui le composent

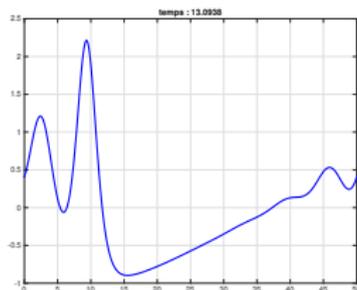


Figure: Oscillations dispersives

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Terme dispersif: $\partial_x^3 v$

- Ondes de longueurs d'onde différentes propagées à des vitesses différentes
- Séparation d'un train d'ondes en les différentes ondes qui le composent

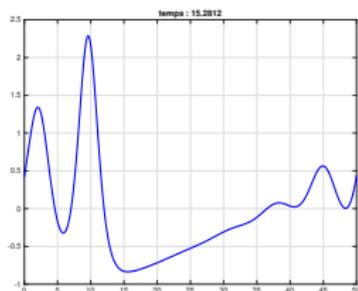


Figure: Oscillations dispersives

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Terme dispersif: $\partial_x^3 v$

- Ondes de longueurs d'onde différentes propagées à des vitesses différentes
- Séparation d'un train d'ondes en les différentes ondes qui le composent

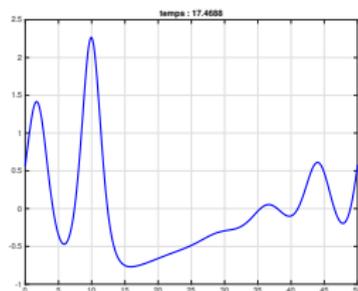


Figure: Oscillations dispersives

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Terme dispersif: $\partial_x^3 v$

- Ondes de longueurs d'onde différentes propagées à des vitesses différentes
- Séparation d'un train d'ondes en les différentes ondes qui le composent

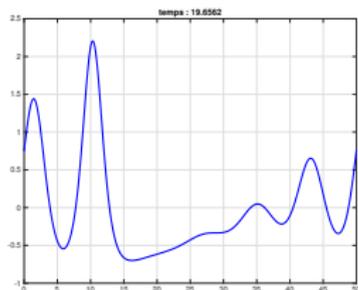


Figure: Oscillations dispersives

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Terme dispersif: $\partial_x^3 v$

Termes dissipatifs: $\partial_x^2 v$ et $\partial_x^4 v$

- Régularisation de la solution

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

- Les équations diffuses-dispersives sous-jacentes :

		dispersion	
		non ($\mu = 0$)	oui ($\mu \neq 0$)
diffusion	non ($\lambda = 0$)($\eta = 0$)		KdV
	2 ^{eme} ordre ($\lambda \neq 0$)($\eta = 0$)		
	4 ^{eme} ordre ($\lambda = 0$)($\eta \neq 0$)		
	2 ^{eme} et 4 ^{eme} ordres ($\lambda \neq 0$)($\eta \neq 0$)	KS	KdV-KS

2. Une équation diffusive-dispersive

- L'équation de **Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky** adimensionnée :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

- Les équations diffuses-dispersives sous-jacentes :

		dispersion	
		non ($\mu = 0$)	oui ($\mu \neq 0$)
diffusion	non ($\lambda = 0$)($\eta = 0$)	Burgers	KdV
	2 ^{eme} ordre ($\lambda \neq 0$)($\eta = 0$)	Burgers visqueux	KdV-Burgers
	4 ^{eme} ordre ($\lambda = 0$)($\eta \neq 0$)	Burgers avec diff. d'ordre 4	KdV avec diff. d'ordre 4
	2 ^{eme} et 4 ^{eme} ordres ($\lambda \neq 0$)($\eta \neq 0$)	KS	KdV-KS

- 1 L'équation de Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky
- 2 Les ondes progressives
 - Rappels sur les ondes progressives
 - Des ondes progressives aux orbites hétéroclines
 - Exemples bien connus
- 3 Ondes progressives pour l'équation de KdV-Burgers
- 4 Ondes progressives pour KdV avec diffusion d'ordre 4
- 5 Stabilité spectrale par analyse numérique

1. Rappels sur les ondes progressives

Définition : Onde progressive (point de vue EDP)

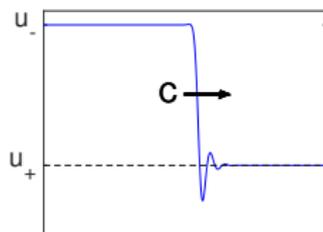
La solution v de (KdV-KS) est appelée une **onde progressive** de **vitesse** $c \in \mathbb{R}$ s'il existe un **profil** u tel que

$$v(t, x) = u(x - ct)$$

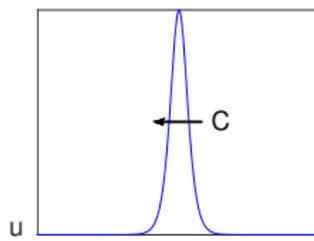
satisfaisant $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} u(\xi) = u_{\pm}$, $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} u^{(i)}(\xi) = 0$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.



► **Front d'onde** si $u_+ \neq u_-$



► **Soliton** si $u_+ = u_-$



N'existe que pour des EDP **non linéaires** et **dispersives**

2. Passage EDP \rightarrow EDO

- Si v vérifie (KdV-KS) $\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$ alors le profil u satisfait une EDO en la variable "rescalée" $\xi = \frac{x-ct}{\eta^{1/3}}$

$$-\frac{c}{\eta^{1/3}} u'(\xi) + \frac{1}{\eta^{1/3}} \left(\frac{u^2}{2} \right)'(\xi) = \frac{\lambda}{\eta^{2/3}} u^{(2)}(\xi) + \frac{\mu}{\eta} u^{(3)}(\xi) - \frac{\eta}{\eta^{4/3}} u^{(4)}(\xi)$$

- En multipliant par $\eta^{1/3}$ et en intégrant une fois ($\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} u^{(i)}(\xi) = 0$)

$$-c(u(\xi) - u_-) + \left(\frac{u^2(\xi) - u_-^2}{2} \right) = \frac{\lambda}{\eta^{1/3}} u'(\xi) + \frac{\mu}{\eta^{2/3}} u^{(2)}(\xi) - u^{(3)}(\xi)$$

- Nous obtenons le système autonome $\frac{d}{d\xi} U(\xi) = F(U(\xi))$ posé dans \mathbb{R}^3 , avec

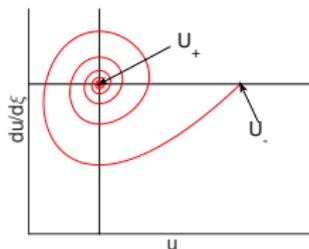
$$U(\xi) = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u^{(2)} \end{pmatrix}(\xi), \quad \text{et} \quad F(U) = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ c(U_1 - u_-) - \left(\frac{U_1^2 - u_-^2}{2} \right) + \frac{\lambda}{\eta^{1/3}} U_2 + \frac{\mu}{\eta^{2/3}} U_3 \end{pmatrix}$$

Rappels sur les orbites hétéroclines/homoclines

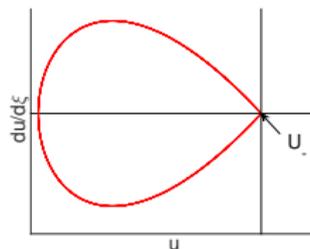
Définition : Orbite hétérocline/homocline (point de vue EDO)

- L'**orbite** de U_0 est l'ensemble décrit par les points $U(\xi)$, solutions de $\frac{d}{d\xi} U(\xi) = F(U(\xi))$ partant de U_0 .
- Un **point d'équilibre** est un point U_* tel que $F(U_*) = 0$.
- S'il existe deux points d'équilibre U_+ et U_- satisfaisant $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U_+$ et $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U_-$, l'orbite est dite :

► **hétérocline** si $U_+ \neq U_-$



► **homocline** si $U_+ = U_-$

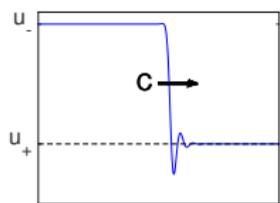


Correspondance onde progressive/orbite

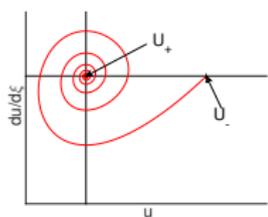
EDP On cherche une solution $v(t, x) = u(x - ct)$ t.q. $u(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} u_{\pm}$ et $u^{(i)}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$

EDO On cherche une orbite $\{U(\xi), \xi \in \mathbb{R}\}$ telle que $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

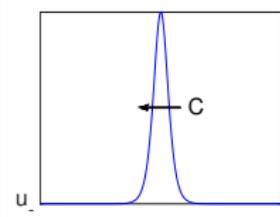
Correspondance : points de vue EDP/EDO



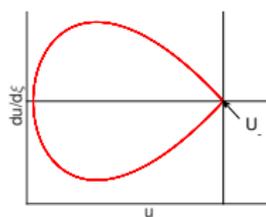
Front d'onde



Orbite hétérocline



Soliton



Orbite homocline

Les oscillations sur la solution v correspondent à un comportement en spirale sur l'orbite.

3. Exemples bien connus

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

		dispersion	
		non ($\mu = 0$)	oui ($\mu \neq 0$)
diffusion	non ($\lambda = 0$)($\eta = 0$)	Burgers	KdV Onde progressive (Soliton) $v(t, x) = -3\sigma \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\mu}}(x + \sigma t) \right)$ avec $\sigma = \mu^{\frac{1}{5}} c$
	2 ^{eme} ordre ($\lambda \neq 0$)($\eta = 0$)	Burgers visqueux Onde progressive (front d'onde) $v(t, x) = c + \frac{[u]}{2} \tanh \left(-\frac{[u]}{4\lambda}(x - ct) \right)$ avec $[u] = u_+ - u_-$ et $c = \frac{u_+ + u_-}{2}$	KdV-Burgers
	4 ^{eme} ordre ($\lambda = 0$)($\eta \neq 0$)	Burgers avec diff. d'ordre 4 ¹	KdV avec diff. d'ordre 4
	2 ^{eme} et 4 ^{eme} ordres ($\lambda \neq 0$)($\eta \neq 0$)	KS	KdV-KS

1. [Mock '76] existence de solutions de viscosité

3. Exemples bien connus

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Burgers visqueux ($\mu = 0$, $\eta = 0$)

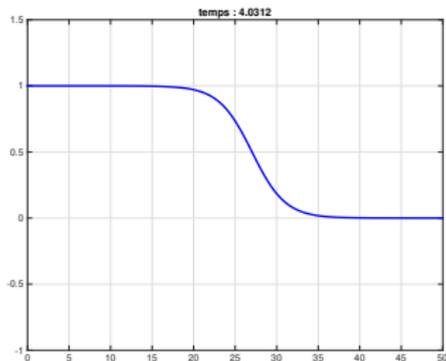


Figure: Front d'onde

KdV ($\lambda = 0$, $\eta = 0$)

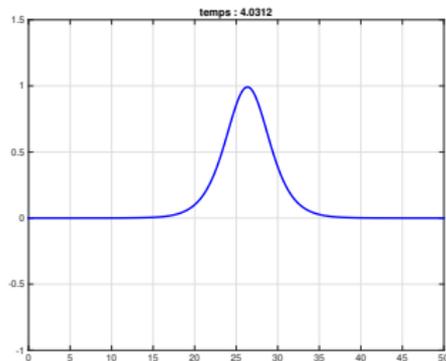


Figure: Soliton

3. Exemples bien connus

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Burgers visqueux ($\mu = 0$, $\eta = 0$)

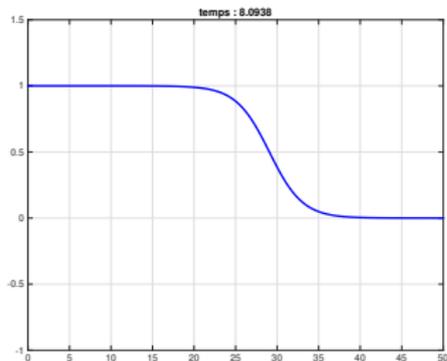


Figure: Front d'onde

KdV ($\lambda = 0$, $\eta = 0$)

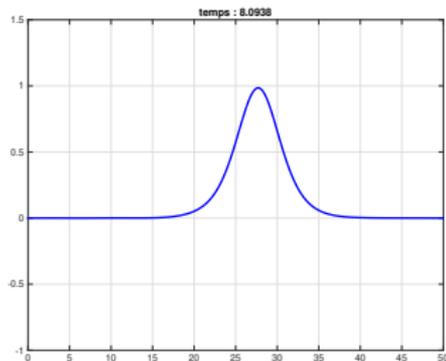


Figure: Soliton

3. Exemples bien connus

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Burgers visqueux ($\mu = 0, \eta = 0$)

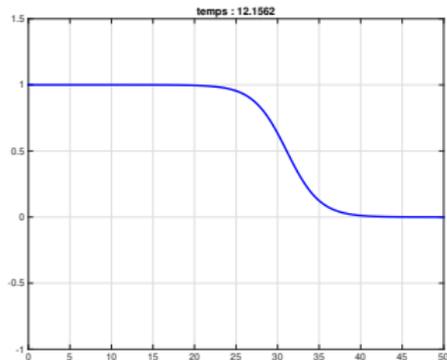


Figure: Front d'onde

KdV ($\lambda = 0, \eta = 0$)

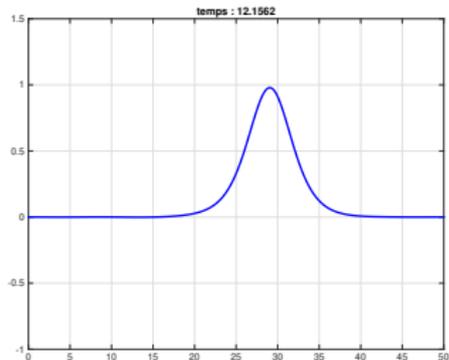


Figure: Soliton

3. Exemples bien connus

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Burgers visqueux ($\mu = 0, \eta = 0$)

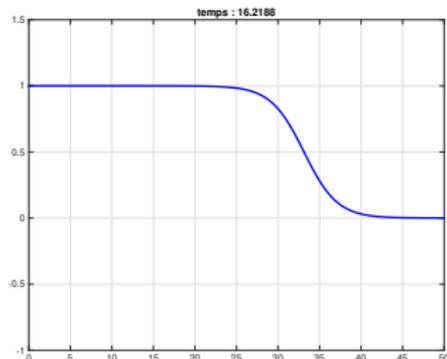


Figure: Front d'onde

KdV ($\lambda = 0, \eta = 0$)

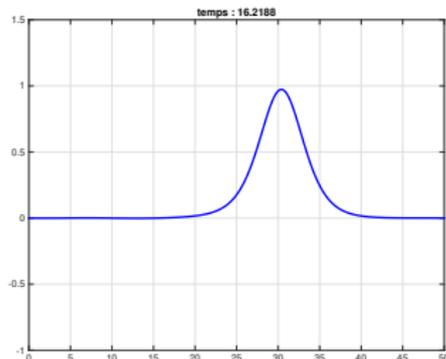


Figure: Soliton

3. Exemples bien connus

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Burgers visqueux ($\mu = 0, \eta = 0$)

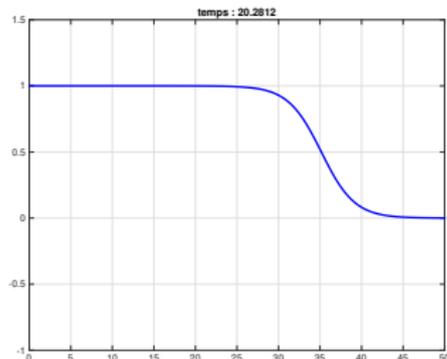


Figure: Front d'onde

KdV ($\lambda = 0, \eta = 0$)

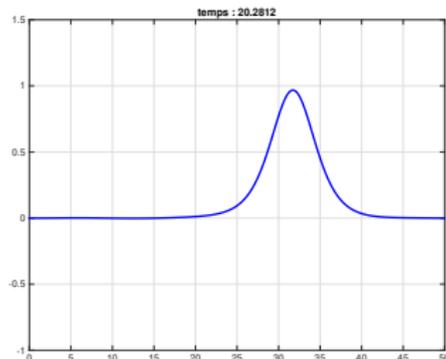


Figure: Soliton

3. Exemples bien connus

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

Burgers visqueux ($\mu = 0, \eta = 0$)

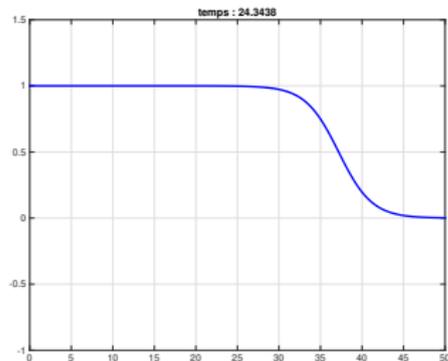


Figure: Front d'onde

KdV ($\lambda = 0, \eta = 0$)

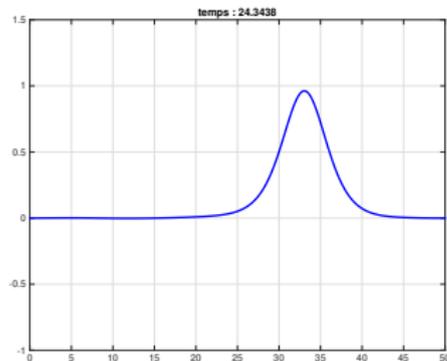


Figure: Soliton

Équations étudiées par la suite

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

		dispersion	
		non ($\mu = 0$)	oui ($\mu \neq 0$)
diffusion {	non ($\lambda = 0$)($\eta = 0$)	Burgers	KdV Onde progressive (Soliton) $v(t, x) = -3\sigma \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\mu}} (x + \sigma t) \right)$ avec $\sigma = \mu^{\frac{1}{5}} c$
	2 ^{eme} ordre ($\lambda \neq 0$)($\eta = 0$)	Burgers visqueux Onde progressive (front d'onde) $v(t, x) = c + \frac{[u]}{2} \tanh \left(-\frac{[u]}{4\lambda} (x - ct) \right)$ avec $[u] = u_+ - u_-$ and $c = \frac{u_+ + u_-}{2}$	KdV-Burgers
	4 ^{eme} ordre ($\lambda = 0$)($\eta \neq 0$)	Burgers avec diff. d'ordre 4	KdV avec diff. d'ordre 4
	2 ^{eme} et 4 ^{eme} ordres ($\lambda \neq 0$)($\eta \neq 0$)	KS	KdV-KS

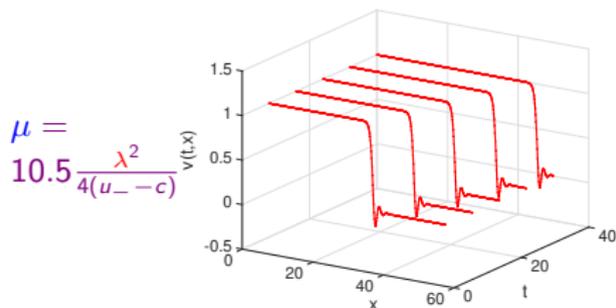
- 1 L'équation de Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky
- 2 Les ondes progressives
- 3 Ondes progressives pour l'équation de KdV-Burgers**
 - Résultat d'existence
 - Le système autonome de Fisher-KPP
- 4 Ondes progressives pour KdV avec diffusion d'ordre 4
- 5 Stabilité spectrale par analyse numérique

1. Résultat d'existence pour KdV-Burgers

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v \quad (\text{KdV-B})$$

Proposition :

- Si $u_+ \geq u_-$ il n'existe pas d'onde progressive reliant u_- à u_+ .
- Si $u_+ < u_-$, il existe une onde progressive de vitesse c qui est
 - ▶ oscillante en u_+ si $\lambda^2 < 4\mu(u_- - c)$



On retrouve les résultats de [\[Bona, Schonbek '85\]](#)

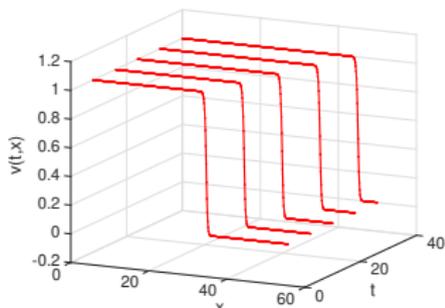
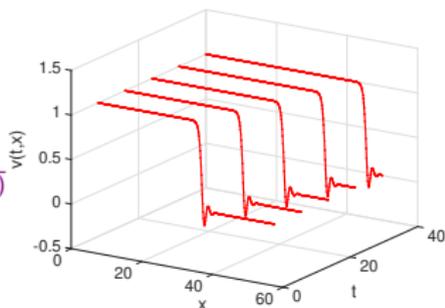
1. Résultat d'existence pour KdV-Burgers

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v \quad (\text{KdV-B})$$

Proposition :

- Si $u_+ \geq u_-$ il n'existe pas d'onde progressive reliant u_- à u_+ .
- Si $u_+ < u_-$, il existe une onde progressive de vitesse c qui est
 - ▶ oscillante en u_+ si $\lambda^2 < 4\mu(u_- - c)$
 - ▶ monotone décroissante vers u_+ si $4\mu(u_- - c) \leq \lambda^2$

$$\mu = 10.5 \frac{\lambda^2}{4(u_- - c)}$$



$$\mu = 0.5 \frac{\lambda^2}{4(u_- - c)}$$

On retrouve les résultats de [\[Bona, Schonbek '85\]](#)

2. Le système autonome de Fisher-KPP

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v \quad (\text{KdV-B})$$

- L'EDO vérifiée par le profil u , en la variable "rescalée" $\xi = \left(\frac{x-ct}{\sqrt{\mu}} \right)$

$$-cu' + \left(\frac{u^2}{2} \right)' = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu}} u^{(2)} + u^{(3)}$$

2. Le système autonome de Fisher-KPP

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v \quad (\text{KdV-B})$$

- L'EDO vérifiée par le profil u , en la variable "rescalée" $\xi = \left(\frac{x-ct}{\sqrt{\mu}} \right)$

$$-c(u - u_-) + \left(\frac{u^2 - u_-^2}{2} \right) = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu}} u' + u^{(2)}$$

$$(\xi \rightarrow +\infty) \Rightarrow c = \frac{u_+ + u_-}{2} \text{ (vitesse du front d'onde)}$$

$$\text{(multiplication par } u' \text{ et intégration)} \Rightarrow u_+ < u_- \text{ (pas d'onde progressive croissante)}$$

2. Le système autonome de Fisher-KPP

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v \quad (\text{KdV-B})$$

- L'EDO vérifiée par le profil u , en la variable "rescalée" $\xi = \left(\frac{x-ct}{\sqrt{\mu}} \right)$

$$-c(u - u_-) + \left(\frac{u^2 - u_-^2}{2} \right) = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu}} u' + u^{(2)}$$

- **Changement de coordonnées:** on pose $y(\xi) = -\frac{1}{2(c-u_-)} u \left(\sqrt{-\frac{1}{c-u_-}} \xi \right) + \frac{2c-u_-}{2(c-u_-)}$

$$(y-1)y = \underbrace{\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}} \sqrt{-\frac{1}{c-u_-}}}_{=: \sigma} y' + y''$$

$$\Rightarrow (y-1)y = \sigma y' + y'' \quad (\text{Fisher-KPP à vitesse } \sigma)$$

2. Le système autonome de Fisher-KPP

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \lambda \partial_x^2 v + \mu \partial_x^3 v \quad (\text{KdV-B})$$

- L'EDO vérifiée par le profil u , en la variable "rescalée" $\xi = \left(\frac{x-ct}{\sqrt{\mu}} \right)$

$$-c(u - u_-) + \left(\frac{u^2 - u_-^2}{2} \right) = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu}} u' + u^{(2)}$$

- **Changement de coordonnées:** on pose $y(\xi) = -\frac{1}{2(c-u_-)} u \left(\sqrt{-\frac{1}{c-u_-}} \xi \right) + \frac{2c-u_-}{2(c-u_-)}$

$$(y-1)y = \underbrace{\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}} \sqrt{-\frac{1}{c-u_-}}}_{=: \sigma} y' + y''$$

$$\Rightarrow (y-1)y = \sigma y' + y'' \quad (\text{Fisher-KPP à vitesse } \sigma)$$

Proposition : ondes progressives pour Fisher-KPP [Murray, '93]

- ▶ Si $\sigma \geq 2$, il existe une onde progressive monotone décroissante joignant u_- à u_+ .
- ▶ Si $0 < \sigma < 2$, il existe une onde progressive oscillante autour de u_+ , joignant u_- à u_+ .

- 1 L'équation de Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky
- 2 Les ondes progressives
- 3 Ondes progressives pour l'équation de KdV-Burgers
- 4 Ondes progressives pour KdV avec diffusion d'ordre 4**
 - Existence d'ondes progressives de petite amplitude
 - Le système autonome augmenté
 - Étude des points d'équilibre
 - Dynamique des solutions
- 5 Stabilité spectrale par analyse numérique

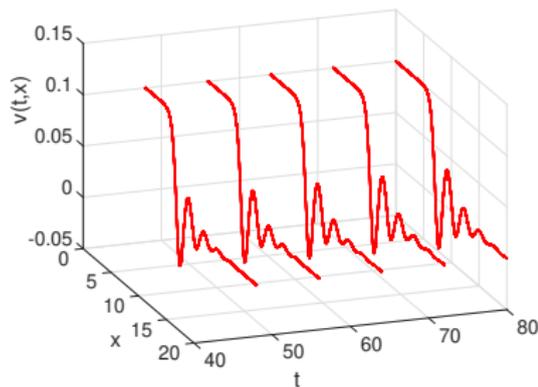
1. Existence d'ondes progressives de petite amplitude

Nous nous intéressons à l'équation **KdV** avec diffusion d'ordre 4

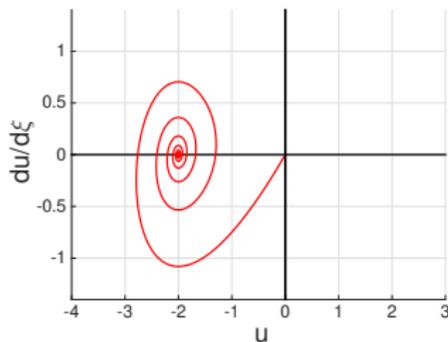
$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v.$$

Théorème : [C., Rousset]

Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u_+ \in (u_- - \delta, u_-)$, il existe un front d'onde de petite amplitude de vitesse $c = \frac{u_+ + u_-}{2}$ joignant u_- à u_+ .



Propagation du front d'onde



Orbite hétérocline

2. Le système autonome augmenté

EDP $\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$

EDO en la variable "rescalée" : $\xi = \frac{x-ct}{\eta^{1/3}}$

$$-cu'(\xi) + \left(\frac{u^2}{2} \right)'(\xi) = \frac{\mu}{\eta^{2/3}} u^{(3)}(\xi) - u^{(4)}(\xi).$$

2. Le système autonome augmenté

EDP

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$$

EDO

en la variable "rescalée" : $\xi = \frac{x-ct}{\eta^{1/3}}$

$$-c(u(\xi) - u_-) + \left(\frac{u^2(\xi) - u_-^2}{2} \right) = \frac{\mu}{\eta^{2/3}} u''(\xi) - u^{(3)}(\xi).$$

2. Le système autonome augmenté

EDP $\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$

EDO en la variable "rescalée" : $\xi = \frac{x-ct}{\eta^{1/3}}$

$$-c(u(\xi) - u_-) + \frac{(u(\xi) - u_-)^2}{2} + u_- (u(\xi) - u_-) = \frac{\mu}{\eta^{2/3}} u''(\xi) - u^{(3)}(\xi).$$

Quand $\xi \rightarrow +\infty$ on a $c = \frac{u_+ + u_-}{2}$. En intégrant, on a de même $u_+ < u_-$.

2. Le système autonome augmenté

EDP $\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$

EDO en la variable "rescalée" : $\xi = \frac{x-ct}{\eta^{1/3}}$

$$-c(u(\xi) - u_-) + \frac{(u(\xi) - u_-)^2}{2} + u_- (u(\xi) - u_-) = \frac{\mu}{\eta^{2/3}} u''(\xi) - u^{(3)}(\xi).$$

Quand $\xi \rightarrow +\infty$ on a $c = \frac{u_+ + u_-}{2}$. En intégrant, on a de même $u_+ < u_-$.

Système autonome augmenté

Petite amplitude : $\varepsilon = (u_- - c) = \frac{u_- - u_+}{2} \ll 1$

$$\underbrace{\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} u - u_- \\ u' \\ u'' \\ \varepsilon \end{pmatrix}}_{=U} = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \\ \frac{\mu}{\eta^{2/3}} u'' + (c - u_-)(u - u_-) - \frac{(u - u_-)^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \underbrace{\frac{\mu}{\eta^{2/3}} U_3 - U_4 U_1 - \frac{U_1^2}{2}}_{=F(U)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Points d'équilibre

On cherche une orbite hétérocline joignant $U_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ à $U_+ = \begin{pmatrix} u_+ - u_- \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$.

Rappels de systèmes dynamiques $\frac{d}{d\xi} U(\xi) = F(U(\xi))$

Question. Etude du linéarisé au voisinage du point d'équilibre U_* ?

Le système linéarisé : $\text{Spec}(DF(U_*)) = \underbrace{\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_-}\}}_{\Re(\lambda_i) < 0}, \underbrace{\{\mu_1, \dots, \mu_{n_0}\}}_{\Re(\mu_i) = 0}, \underbrace{\{\nu_1, \dots, \nu_{n_+}\}}_{\Re(\nu_i) > 0}$.

Définition : Sous-espace stable, central et instable

$$\mathbb{E}_{U_*}^s = \oplus \ker(DF(U_*) - \lambda_i I)^{s_i}$$

Sous espace stable

$$= \{U_0 \text{ t.q. } U(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} U_*\}$$

$$\mathbb{E}_{U_*}^c = \oplus \ker(DF(U_*) - \mu_i I)^{s_i}$$

Sous espace central

$$= \{U_0 \text{ t.q. } U \text{ soit bornée}\}$$

$$\mathbb{E}_{U_*}^u = \oplus \ker(DF(U_*) - \nu_i I)^{s_i}$$

Sous espace instable

$$= \{U_0 \text{ t.q. } U(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} U_*\}$$

Rappels de systèmes dynamiques $\frac{d}{d\xi} U(\xi) = F(U(\xi))$

Question. Etude du linéarisé au voisinage du point d'équilibre U_* ?

Le système linéarisé : $\text{Spec}(DF(U_*)) = \underbrace{\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_-}\}}_{\Re(\lambda_i) < 0}, \underbrace{\{\mu_1, \dots, \mu_{n_0}\}}_{\Re(\mu_i) = 0}, \underbrace{\{\nu_1, \dots, \nu_{n_+}\}}_{\Re(\nu_i) > 0}$.

Définition : Sous-espace stable, central et instable

$\mathbb{E}_{U_*}^s$ sous espace stable

$\mathbb{E}_{U_*}^c$ sous espace central

$\mathbb{E}_{U_*}^u$ sous espace instable

Question. Lien entre le linéarisé et le non-linéaire ?

Théorème de Hartman-Grobman Si $DF(U_*)$ n'a pas de val. propre de partie réelle nulle, l'EDO est localement topologiquement équivalente à son linéarisé.

Théorème de la variété stable Si $DF(U_*)$ n'a pas de val. propre de partie réelle nulle,

- il existe deux variétés locales

$$\mathbb{W}_{U_*}^s = \{U_0 \text{ tel que } U(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} U_*\} \quad \text{et} \quad \mathbb{W}_{U_*}^u = \{U_0 \text{ tel que } U(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} U_*\}.$$

- Ces variétés sont tangentes aux sous-espaces stable $\mathbb{E}_{U_*}^s$ et instable $\mathbb{E}_{U_*}^u$
(il existe des fonctions Φ^i telles que $\Phi^i(U_*) = 0$, $D\Phi^i(U_*) = 0$ et $\mathbb{W}_{U_*}^i = \{X^i + \Phi^i(X^i), X^i \in \mathbb{E}_{U_*}^i\} \cap \mathcal{V}_{U_*}$).

3. Points d'équilibre du système augmenté

L'EDO $\frac{d}{d\xi} U(\xi) = F(U(\xi))$ avec $F(U) = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \frac{\mu}{\eta^{\frac{2}{3}}} U_3 - U_4 U_1 - \frac{U_1^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Points d'équilibre : étude du linéarisé

	$U_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$	$U_+ = \begin{pmatrix} -2\varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$
Mat. jacobienne	$DF(U_-) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & \frac{\mu}{\eta^{\frac{2}{3}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$DF(U_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon & 0 & \frac{\mu}{\eta^{\frac{2}{3}}} & 2\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Valeurs propres	$\Re e(\lambda_1) < 0 < \Re e(\lambda_2) \leq \Re e(\lambda_3)$ $\Re e(\lambda_4) = 0$	$\Re e(\lambda_1) \leq \Re e(\lambda_2) < 0 < \Re e(\lambda_3)$ $\Re e(\lambda_4) = 0$

ATTENTION

Les théorèmes de Hartman-Grobman et de la variété stable ne s'appliquent pas car $\Re e(\lambda_4) = 0$

Question. Comment faire quand $\Re e(\lambda_4) = 0$?

Étude du linéarisé autour de 0 U_- est une petite perturbation de $(0 \ 0 \ 0 \ 0)^t$.

	$(0 \ 0 \ 0 \ 0)^t$
Mat. jacobienne	$DF(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\eta^{2/3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Valeurs propres	$\Re e(\lambda_1) > 0$ et $\Re e(\lambda_2) = \Re e(\lambda_3) = \Re e(\lambda_4) = 0$
Sous-espaces	$\dim(\mathbb{E}_0^u) = 1, \dim(\mathbb{E}_0^s) = 0$ $\dim(\mathbb{E}_0^c) = 3$

Question. Comment faire quand $\Re e(\lambda_4) = 0$?

Étude du linéarisé autour de 0 U_- est une petite perturbation de $(0 \ 0 \ 0 \ 0)^t$.

	$(0 \ 0 \ 0 \ 0)^t$
Mat. jacobienne	$DF(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\eta^{2/3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Valeurs propres	$\Re e(\lambda_1) > 0$ et $\Re e(\lambda_2) = \Re e(\lambda_3) = \Re e(\lambda_4) = 0$
Sous-espaces	$\dim(\mathbb{E}_0^u) = 1, \dim(\mathbb{E}_0^s) = 0$ $\dim(\mathbb{E}_0^c) = 3$

Théorème de la variété centrale

- ▶ Il existe une variété de dimension 3, notée \mathbb{W}_0^c , qui contient toutes les solutions bornées dans un voisinage \mathcal{V}_0 de $(0 \ 0 \ 0 \ 0)^t$.
- ▶ De plus, il existe une fonction quadratique Φ^c telle que $\Phi^c(0) = 0, D\Phi^c(0) = 0$ et

$$\mathbb{W}_0^c = \{X^c + \Phi^c(X^c), X^c \in \mathbb{E}_0^c\} \cap \mathcal{V}_0.$$

Onde progressive de petite amplitude

$$\varepsilon = \frac{u_- - u_+}{2} \ll 1.$$

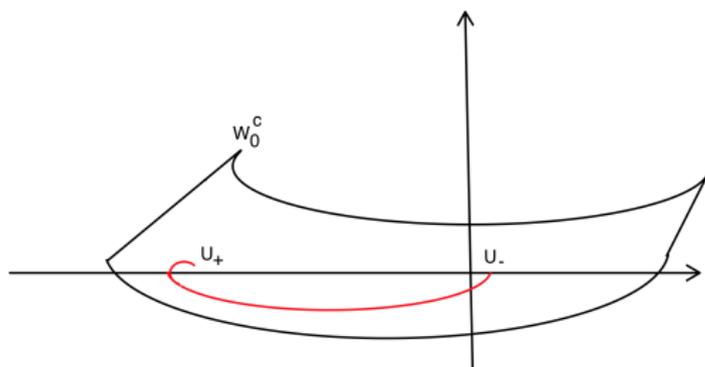


Figure: La solution recherchée est contenue dans \mathbb{W}_0^c (indépendante de ε)

Onde progressive de petite amplitude

$$\varepsilon = \frac{u_- - u_+}{2} \ll 1.$$

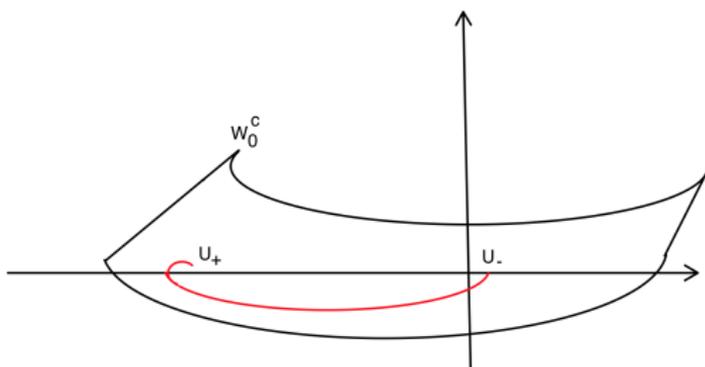


Figure: La solution recherchée est contenue dans \mathbb{W}_0^c (indépendante de ε)

Projection sur \mathbb{W}_0^c

$$\begin{cases} \alpha = -\varepsilon \\ \beta = u - u_- - \frac{\eta^{\frac{4}{3}} u''}{\mu^2} \\ \gamma = u' - \frac{\eta^{\frac{2}{3}} u''}{\mu} \\ \delta = u'' = \Phi^c(\varepsilon, \beta, \gamma) \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma + \frac{\eta^{\frac{4}{3}}}{\mu^2} \varepsilon \beta + \frac{\eta^{\frac{4}{3}}}{2\mu^2} \beta^2 + f_1(\varepsilon, \beta, \gamma) \\ \frac{\eta^{\frac{2}{3}}}{\mu} \varepsilon \beta + \frac{\eta^{\frac{2}{3}}}{2\mu} \beta^2 + f_2(\varepsilon, \beta, \gamma) \end{pmatrix}$$

Question. Comment avoir des points d'équilibre U_+ et U_- indépendants de ε ?

- On fixe $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma + \frac{\eta^{\frac{4}{3}}}{\mu^2} \bar{\varepsilon} \beta + \frac{\eta^{\frac{4}{3}}}{2\mu^2} \beta^2 + f_1(\bar{\varepsilon}, \beta, \gamma) \\ \frac{\eta^{\frac{2}{3}}}{\mu} \bar{\varepsilon} \beta + \frac{\eta^{\frac{2}{3}}}{2\mu} \beta^2 + f_2(\bar{\varepsilon}, \beta, \gamma) \end{pmatrix}$$

Question. Comment avoir des points d'équilibre U_+ et U_- indépendants de ε ?

• On fixe $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma + \frac{\eta}{\mu^2} \frac{4}{3} \bar{\varepsilon} \beta + \frac{\eta}{2\mu^2} \beta^2 + f_1(\bar{\varepsilon}, \beta, \gamma) \\ \frac{\eta}{\mu} \frac{2}{3} \bar{\varepsilon} \beta + \frac{\eta}{2\mu} \beta^2 + f_2(\bar{\varepsilon}, \beta, \gamma) \end{pmatrix}$$

• **Changement de coordonnées singulier** dans un voisinage de $(0, 0)^t$

$$\begin{cases} X(\xi) = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \beta \left(\frac{\xi}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} \right) \\ Y(\xi) = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{3/2}} \gamma \left(\frac{\xi}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y + \sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\eta}{\mu^2} \frac{4}{3} \left[X + \frac{X^2}{2} + g_1(\bar{\varepsilon}, X, Y) \right] \\ \frac{\eta}{\mu} \frac{2}{3} \left[X + \frac{X^2}{2} + g_2(\bar{\varepsilon}, X, Y) \right] \end{pmatrix}$$

• On veut connecter $U_- = (X_- \ Y_-)^t = (0, 0)^t$ à $U_+ = (X_+ \ Y_+)^t = (-2, 0)^t$.

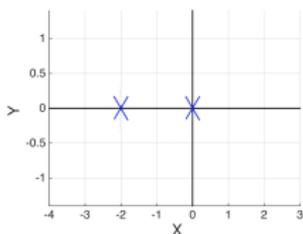


FIGURE – Points d'équilibre dans les coordonnées $(X \ Y)^t$

Stabilité des points d'équilibre U_- et U_+

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y + \sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\eta^{4/3}}{\mu^2} \left[X + \frac{X^2}{2} + g_1(\bar{\varepsilon}, X, Y) \right] \\ \frac{\eta^{2/3}}{\mu} \left[X + \frac{X^2}{2} + g_2(\bar{\varepsilon}, X, Y) \right] \end{pmatrix}$$

Points d'équilibre

pour $0 < \bar{\varepsilon} \ll 1$, il n'existe que deux points d'équilibre

	$U_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$U_+ = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
Mat. jacobienne	$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}} \eta^{4/3}}{\mu^2} & 1 \\ \frac{\eta^{2/3}}{\mu} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}} \eta^{4/3}}{\mu^2} & 1 \\ -\frac{\eta^{2/3}}{\mu} & 0 \end{pmatrix}$
Valeurs propres	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) < 0$
Nature	Point selle	Foyer stable

Solution locale

Soit $U_0 = (X_0, Y_0) \in \mathbb{W}_{U_-}^u$

Théorème de Cauchy Lipschitz, il existe une solution maximale U partant de U_0

Théorème de la variété stable, on a $U(\xi) \xrightarrow[\xi \rightarrow -\infty]{} U_-$

4. Dynamique des solutions

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si le champ de vecteur F est localement lipschitzien en U , alors le problème de Cauchy $\frac{d}{d\xi} U(\xi) = F(U(\xi))$ muni de la donnée initiale $U(\xi_0) = U_0$ est (localement) bien posé pour toute donnée initiale U_0 .

Question. Existence et comportement en temps long des solutions ?

Théorème de sortie de tout compact

Si le champ de vecteur F est localement lipschitzien en U , et si U est une solution maximale définie sur $[a, b]$, alors

$$a = -\infty \quad \text{OU} \quad U \text{ sort de tout compact.}$$

(on a le même constat pour la borne b).

Théorème de Poincaré-Bendixson

Étant donné un système autonome $\frac{d}{d\xi} U = F(U)$ et U une solution qui reste confinée dans un compact sur tout son ensemble de définition. Alors,

$$U \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} U_* \text{ (point d'équilibre)} \quad \text{OU} \quad U \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathcal{C} \text{ (cycle périodique).}$$

Construction du compact piège

- Pour $\bar{\varepsilon} = 0$, le **système limite** s'écrit

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ \frac{\eta_{\text{sup}}^2}{\mu} \left[X + \frac{X^2}{2} \right] \end{pmatrix}$$

Il y a deux points d'équilibre $(0, 0)^t$ (point selle) et $(-2, 0)^t$ (centre).

Construction du compact piège

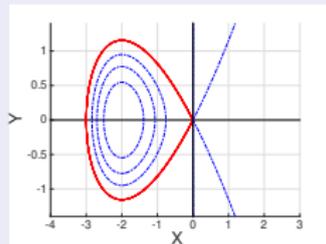
- Pour $\bar{\varepsilon} = 0$, le **système limite** s'écrit

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ \frac{\eta_{\text{sol}}}{\mu} \left[X + \frac{X^2}{2} \right] \end{pmatrix}$$

Il y a deux points d'équilibre $(0, 0)^t$ (point selle) et $(-2, 0)^t$ (centre).

Proposition [C., Rousset]

- La fonction $\mathcal{H}(X, Y) = (X + 2)^2 + \frac{\mu}{\eta_{\text{sol}}} Y^2 - \frac{(X+2)^3}{3}$ est un hamiltonien quand $\bar{\varepsilon} = 0$ (il est constant le long des trajectoires).
- Il existe une orbite homocline $(X^{\text{hom}}, Y^{\text{hom}})^t$ au point selle $(0, 0)^t$, quand $\bar{\varepsilon} = 0$. Cette orbite homocline correspond à la ligne de niveau $4/3$ de \mathcal{H} . Elle correspond aussi au soliton de l'équation KdV à poids $\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\mu}{\eta_{\text{sol}}} \partial_x^3 v = 0$.



- Orbite homocline $(X^{\text{hom}}, Y^{\text{hom}})$
- ... Lignes de niveau de \mathcal{H}

Question. Qu'arrive-t-il à l'orbite homocline quand le système est perturbé par $\bar{\varepsilon} \neq 0$?

Question. Qu'arrive-t-il à l'orbite homocline quand le système est perturbé par $\bar{\varepsilon} \neq 0$?

- Une orbite homocline apparaît quand la variété stable et la variété instable d'un point selle **s'intersectent**.
- Quand $\bar{\varepsilon} \neq 0$, il n'y a aucune raison pour que les deux variétés continuent de s'intersecter et ainsi, l'orbite homocline **se coupe en deux**. La question ensuite est d'identifier **les positions mutuelles** de ces deux variétés.

Question. Qu'arrive-t-il à l'orbite homocline quand le système est perturbé par $\bar{\varepsilon} \neq 0$?

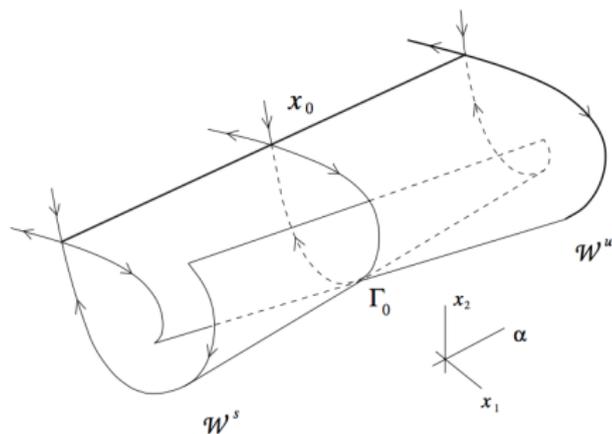
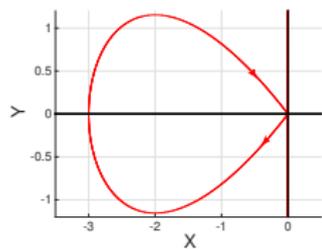
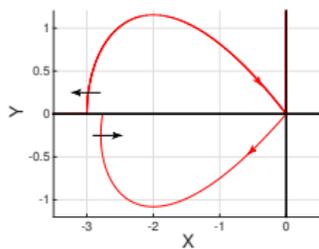


FIGURE – Positions mutuelles des deux variétés (Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 1997)

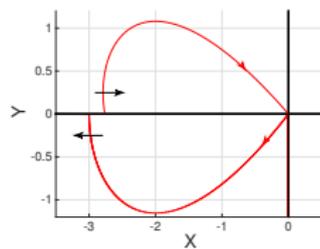
• Les cas possibles :



Sans perturbation



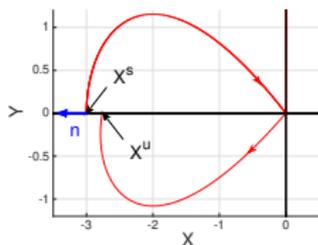
W^s_{U-} est à l'intérieur de W^u_{U-}
Scénario favorable



W^s_{U-} est à l'extérieur de W^u_{U-}
Scénario défavorable

Question. Qu'arrive-t-il à l'orbite homocline quand le système est perturbé par $\bar{\varepsilon} \neq 0$?

Question. Qu'arrive-t-il à l'orbite homocline quand le système est perturbé par $\bar{\varepsilon} \neq 0$?

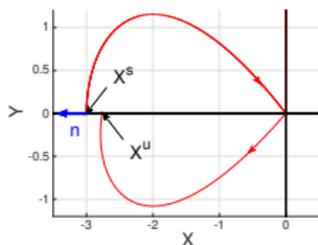


Bifurcation : $M(\bar{\varepsilon}) = \langle \overrightarrow{X^s X^u}, \mathbf{n} \rangle$, avec \mathbf{n} orthogonale à $\mathbb{W}_{(X^{hom}, Y^{hom})}^s$ et $\mathbb{W}_{(X^{hom}, Y^{hom})}^u$ [Feng et al. '03]

Fonction de césure: $M(\bar{\varepsilon}) = M(0) + \partial_{\bar{\varepsilon}} M(0) \bar{\varepsilon} + \mathcal{O}(\bar{\varepsilon}^2)$

Intégrale de Melnikov: $\partial_{\bar{\varepsilon}} M(0)$ [Guckenheimer et al. '83]

Question. Qu'arrive-t-il à l'orbite homocline quand le système est perturbé par $\bar{\varepsilon} \neq 0$?



Bifurcation : $M(\bar{\varepsilon}) = \left\langle \overrightarrow{X^s X^u}, \mathbf{n} \right\rangle$, avec \mathbf{n} orthogonale à $\mathbb{W}_{(X^{hom}, Y^{hom})}^s$ et $\mathbb{W}_{(X^{hom}, Y^{hom})}^u$ [Feng et al. '03]

Fonction de césure: $M(\bar{\varepsilon}) = M(0) + \partial_{\bar{\varepsilon}} M(0) \bar{\varepsilon} + \mathcal{O}(\bar{\varepsilon}^2)$

Intégrale de Melnikov: $\partial_{\bar{\varepsilon}} M(0)$ [Guckenheimer et al. '83]

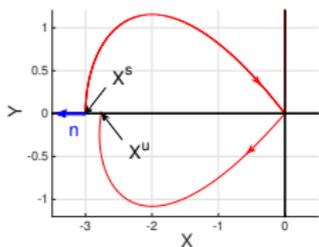
Proposition [Kuznetsov '97]

Pour le système $(X', Y') = (F_1(X, Y, \bar{\varepsilon}), F_2(X, Y, \bar{\varepsilon}))$, l'intégrale de Melnikov s'écrit

$$\partial_{\bar{\varepsilon}} M(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[- \int_0^{\xi} \operatorname{div} F (X^{hom}, Y^{hom}, 0) \right] \right\} (F \wedge \partial_{\bar{\varepsilon}} F) (X^{hom}, Y^{hom}, 0)$$

avec $\operatorname{div} F = \partial_X F_1 + \partial_Y F_2$ et $F \wedge \partial_{\bar{\varepsilon}} F = F_1 \partial_{\bar{\varepsilon}} F_2 - F_2 \partial_{\bar{\varepsilon}} F_1$

Question. Qu'arrive-t-il à l'orbite homocline quand le système est perturbé par $\bar{\varepsilon} \neq 0$?



Bifurcation : $M(\bar{\varepsilon}) = \langle \overrightarrow{X^s X^u}, \mathbf{n} \rangle$, avec \mathbf{n} orthogonale à $\mathbb{W}_{(X^{hom}, Y^{hom})}^s$ et $\mathbb{W}_{(X^{hom}, Y^{hom})}^u$ [Feng et al. '03]

Fonction de césure: $M(\bar{\varepsilon}) = M(0) + \partial_{\bar{\varepsilon}} M(0) \bar{\varepsilon} + \mathcal{O}(\bar{\varepsilon}^2)$

Intégrale de Melnikov: $\partial_{\bar{\varepsilon}} M(0)$ [Guckenheimer et al. '83]

Proposition [Kuznetsov '97]

Pour le système $(X', Y') = (F_1(X, Y, \bar{\varepsilon}), F_2(X, Y, \bar{\varepsilon}))$, l'intégrale de Melnikov s'écrit

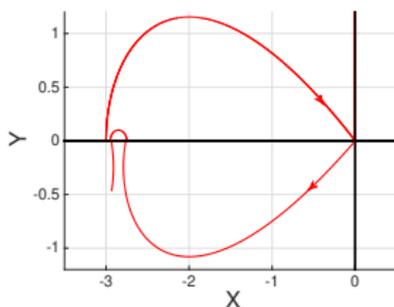
$$\partial_{\bar{\varepsilon}} M(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[- \int_0^{\xi} \operatorname{div} F (X^{hom}, Y^{hom}, 0) \right] \right\} (F \wedge \partial_{\bar{\varepsilon}} F) (X^{hom}, Y^{hom}, 0)$$

avec $\operatorname{div} F = \partial_X F_1 + \partial_Y F_2$ et $F \wedge \partial_{\bar{\varepsilon}} F = F_1 \partial_{\bar{\varepsilon}} F_2 - F_2 \partial_{\bar{\varepsilon}} F_1$

Dans notre cas, $\partial_{\bar{\varepsilon}} M(0) = -\frac{\eta^2}{\mu^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (X + \frac{X^2}{2})^2(\xi) d\xi < 0 \implies$ Scénario favorable

Question. Comment exclure les scénarios "pathogènes" ou les **cycles limites** ?

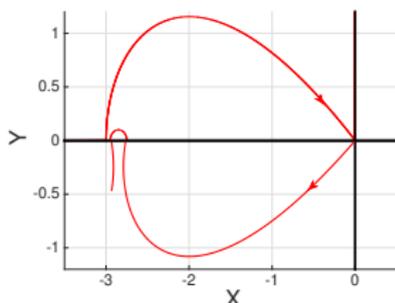
Question. Comment exclure les scénarios "pathogènes" ou les **cycles limites** ?



Proposition [C., Rousset]

- La fonction $\mathcal{L}(u - u_-, u', u'', \varepsilon) = \varepsilon \frac{(u - u_-)^2}{2} - \frac{(u - u_-)^3}{6} + \frac{\mu}{\eta_3} \frac{(u')^2}{2} - u'' u'$ est (strictement) décroissante le long des trajectoires (**fonction de Lyapunov**).
- Dans le repère (X, Y) , sa restriction à $Y = 0$ et $\varepsilon \in \mathcal{V}_0$ est (strictement) décroissante sur $X \in] -\infty, -2[$.

Question. Comment exclure les scénarios "pathogènes" ou les cycles limites ?



Proposition [C., Rousset]

- La fonction $\mathcal{L}(u - u_-, u', u'', \varepsilon) = \varepsilon \frac{(u - u_-)^2}{2} - \frac{(u - u_-)^3}{6} + \frac{\mu}{\eta^{\frac{2}{3}}} \frac{(u')^2}{2} - u'' u'$ est (strictement) décroissante le long des trajectoires (**fonction de Lyapunov**).
- Dans le repère (X, Y) , sa restriction à $Y = 0$ et $\varepsilon \in \mathcal{V}_0$ est (strictement) décroissante sur $X \in] -\infty, -2[$.

Solution globale

La solution est piégée dans un compact.

Thm. de sortie de tout compact, U est globale et définie sur tout \mathbb{R} .

Convergence vers U_+

La solution U ne peut être périodique.

Thm. de Poincaré-Bendixson, elle converge vers le point d'équilibre U_+ .

Thm. de Hartman-Grobman, elle oscille autour de $(-2, 0)^t$ (foyer stable pour le linéarisé).

Existence d'une orbite hétérocline avec $u_+ < u_-$

Méthode suivie:

▶ **Étape A.** Système autonome **augmenté** du premier ordre dans **l'espace des phases**

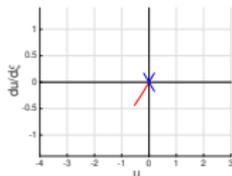


Existence d'une orbite hétérocline avec $u_+ < u_-$

Méthode suivie:

► **Étape A.** Système autonome **augmenté** du premier ordre dans l'**espace des phases**

► **Étape B.** Existence d'une **solution locale** au voisinage de U_-



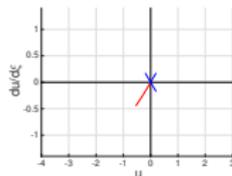
►

►

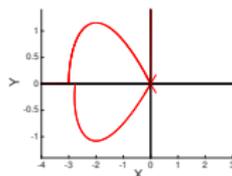
Existence d'une orbite hétérocline avec $u_+ < u_-$

Méthode suivie:

- ▶ **Étape A.** Système autonome **augmenté** du premier ordre dans l'espace des phases
- ▶ **Étape B.** Existence d'une **solution locale** au voisinage de U_-



- ▶ **Étape C.** **Domaine piège:** Solution globale définie sur tout \mathbb{R} .

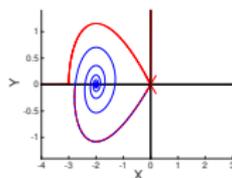
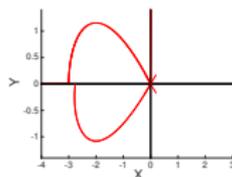
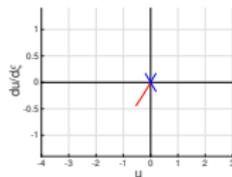


▶

Existence d'une orbite hétérocline avec $u_+ < u_-$

Méthode suivie:

- ▶ **Étape A.** Système autonome **augmenté** du premier ordre dans l'**espace des phases**
- ▶ **Étape B.** Existence d'une **solution locale** au voisinage de U_-
- ▶ **Étape C.** **Domaine piège**: Solution globale définie sur tout \mathbb{R} .
- ▶ **Étape D.** **Convergence** vers U_+ dans le futur



- 1 L'équation de Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky
- 2 Les ondes progressives
- 3 Ondes progressives pour l'équation de KdV-Burgers
- 4 Ondes progressives pour KdV avec diffusion d'ordre 4
- 5 Stabilité spectrale par analyse numérique**
 - Stabilité spectrale et fonction d'Evans
 - Spectre d'un opérateur
 - Calcul du spectre essentiel
 - Étude du spectre ponctuel : la fonction d'Evans

Question. Quel est le comportement de l'onde progressive après une petite perturbation ?

Question. Quel est le comportement de l'onde progressive après une petite perturbation ?

Premier test prospectif

Pour l'équation de KdV avec diffusion d'ordre 4,

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v \quad (\text{KdV-4})$$

avec les paramètres $\mu = 0.01$, $\eta = \mu^{\frac{2}{3}}$ et une donnée initiale sous forme de fonction indicatrice.

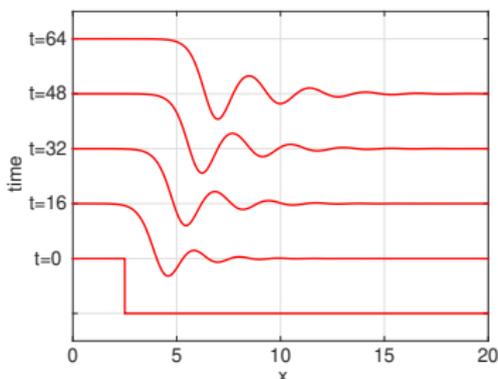


Figure: Évolution de la solution du problème de Cauchy lié à (KdV-4)

1. Stabilité spectrale

Soit $\xi = \frac{x-ct}{\eta^{1/3}}$ et $s = \frac{t}{\eta^{1/3}}$, nous rappelons l'EDP $\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$.

Petite perturbation

Soit u , le profil de l'onde progressive.

- Considérons une petite **perturbation** $u(\xi) + \bar{w}(s, \xi)$. Nous obtenons (à l'ordre 1 en \bar{w})

$$\partial_s \bar{w}(s, \xi) - c \partial_\xi \bar{w}(s, \xi) + u'(\xi) \bar{w}(s, \xi) + u(\xi) \partial_\xi \bar{w}(s, \xi) = \frac{\mu}{\eta^{2/3}} \partial_\xi^3 \bar{w}(s, \xi) - \partial_\xi^4 \bar{w}(s, \xi).$$

- Choisissons une perturbation \bar{w} de la forme $\bar{w}(s, \xi) = e^{\rho s} w(\xi)$.

$$e^{\rho s} (\rho w(\xi) - cw'(\xi) + u'(\xi)w(\xi) + u(\xi)w'(\xi)) = e^{\rho s} \left(\frac{\mu}{\eta^{2/3}} w^{(3)}(\xi) - w^{(4)}(\xi) \right).$$

1. Stabilité spectrale

Soit $\xi = \frac{x-ct}{\eta^{1/3}}$ et $s = \frac{t}{\eta^{1/3}}$, nous rappelons l'EDP $\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mu \partial_x^3 v - \eta \partial_x^4 v$.

Petite perturbation

Soit u , le profil de l'onde progressive.

- Considérons une petite **perturbation** $u(\xi) + \bar{w}(s, \xi)$. Nous obtenons (à l'ordre 1 en \bar{w})

$$\partial_s \bar{w}(s, \xi) - c \partial_\xi \bar{w}(s, \xi) + u'(\xi) \bar{w}(s, \xi) + u(\xi) \partial_\xi \bar{w}(s, \xi) = \frac{\mu}{\eta^{2/3}} \partial_\xi^3 \bar{w}(s, \xi) - \partial_\xi^4 \bar{w}(s, \xi).$$

- Choisissons une perturbation \bar{w} de la forme $\bar{w}(s, \xi) = e^{\rho s} w(\xi)$.

$$e^{\rho s} (\rho w(\xi) - c w'(\xi) + u'(\xi) w(\xi) + u(\xi) w'(\xi)) = e^{\rho s} \left(\frac{\mu}{\eta^{2/3}} w^{(3)}(\xi) - w^{(4)}(\xi) \right).$$

Problème spectral

On obtient le **problème spectral**

$$\mathcal{M}w = \rho w, \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}w = -u'w + (c - u)w' + \frac{\mu}{\eta^{2/3}} w^{(3)} - w^{(4)},$$

Définition : Stabilité spectrale

L'onde progressive de profil u est dite **stable** si $\sigma(\mathcal{M}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0\} = \{0\}$, où $\sigma(\mathcal{M})$ est le spectre de \mathcal{M} .

2. Spectre d'un opérateur \mathcal{M}

Rappel

L'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est inversible ssi

\mathcal{A} est injectif ET d'image dense $\overline{\text{Im}(\mathcal{A})} = \mathcal{F}$ ET d'image fermée $\overline{\text{Im}(\mathcal{A})} = \text{Im}(\mathcal{A})$.

Définition : Spectre de \mathcal{M}

Le spectre de \mathcal{M} est l'ensemble $\sigma(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathcal{M} - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}$

$$\sigma_p(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathcal{M} - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}$$

Spectre ponctuel

FIGURE— Spectre de \mathcal{M}



2. Spectre d'un opérateur \mathcal{M}

Rappel

L'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est inversible ssi

\mathcal{A} est injectif ET d'image dense $\overline{\text{Im}(\mathcal{A})} = \mathcal{F}$ ET d'image fermée $\overline{\text{Im}(\mathcal{A})} = \text{Im}(\mathcal{A})$.

Définition : Spectre de \mathcal{M}

Le spectre de \mathcal{M} est l'ensemble $\sigma(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathcal{M} - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}$

$\sigma_p(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathcal{M} - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}$

Spectre ponctuel



FIGURE– Spectre de \mathcal{M}

2. Spectre d'un opérateur \mathcal{M}

Rappel

L'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est inversible ssi

\mathcal{A} est injectif ET d'image dense $\overline{\text{Im}(\mathcal{A})} = \mathcal{F}$ ET d'image fermée $\overline{\text{Im}(\mathcal{A})} = \text{Im}(\mathcal{A})$.

Définition : Spectre de \mathcal{M}

Le spectre de \mathcal{M} est l'ensemble $\sigma(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathcal{M} - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}$

\swarrow
 $\sigma_p(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathcal{M} - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}$

Spectre ponctuel

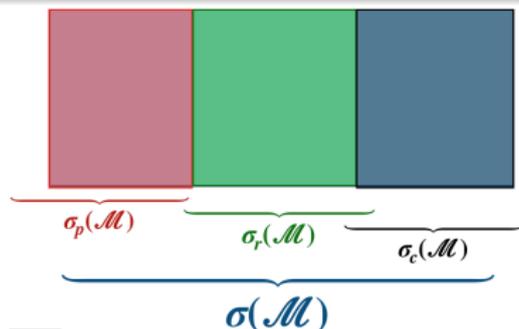
\downarrow
 $\sigma_r(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathcal{M} - \lambda I \text{ est injectif}$
 $\text{Im}(\mathcal{M} - \lambda I) \text{ n'est pas dense}\}$

Spectre résiduel

\searrow
 $\sigma_c(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathcal{M} - \lambda I \text{ est injectif}$
 $\text{Im}(\mathcal{M} - \lambda I) \text{ n'est pas fermée}\}$

Spectre continu

FIGURE— Spectre de \mathcal{M}



2. Spectre d'un opérateur \mathcal{M}

Opérateur de Fredholm

- $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est inversible ssi $\exists \mathcal{B} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ tel que $I_{\mathcal{F}} - \mathcal{A}\mathcal{B} = 0$ et $I_{\mathcal{E}} - \mathcal{B}\mathcal{A} = 0$.
 - $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est de Fredholm ssi $\exists \mathcal{B} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ t.q. $I_{\mathcal{F}} - \mathcal{A}\mathcal{B}$ et $I_{\mathcal{E}} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ soient compacts.
- Les opérateurs de Fredholm sont les inversibles "modulo les opérateurs compacts".

Si \mathcal{A} est inversible alors \mathcal{A} est de Fredholm (d'indice 0).

Définition : Spectre essentiel de \mathcal{M}

Le spectre essentiel de \mathcal{M} est l'ensemble

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{M}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathcal{M} - \lambda I \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice 0}\}$$

$$\subset \sigma(\mathcal{M})$$



Un opérateur \mathcal{A} est dit de Fredholm d'indice 0 si son image est fermée ET $\dim(\text{Ker}(\mathcal{A})) = \text{codim}(\text{Im}(\mathcal{A})) < +\infty$

2. Spectre d'un opérateur \mathcal{M}

Opérateur de Fredholm

- $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est inversible ssi $\exists \mathcal{B} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ tel que $I_{\mathcal{F}} - \mathcal{A}\mathcal{B} = 0$ et $I_{\mathcal{E}} - \mathcal{B}\mathcal{A} = 0$.
- $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est de Fredholm ssi $\exists \mathcal{B} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ t.q. $I_{\mathcal{F}} - \mathcal{A}\mathcal{B}$ et $I_{\mathcal{E}} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ soient compacts. Les opérateurs de Fredholm sont les inversibles "modulo les opérateurs compacts".

Si \mathcal{A} est inversible alors \mathcal{A} est de Fredholm (d'indice 0).

Définition : Spectre essentiel de \mathcal{M}

Le spectre essentiel de \mathcal{M} est l'ensemble

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{M}) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathcal{M} - \lambda I \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice } 0 \}$$

$$\subset \sigma(\mathcal{M})$$

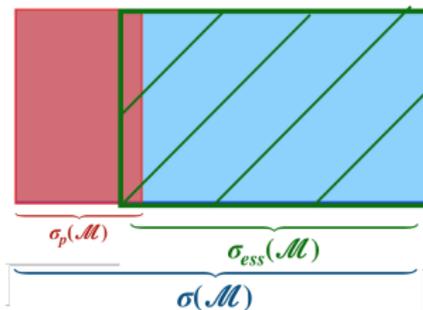
- $\sigma_p(\mathcal{M}) \cap \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$

- on a

$$\sigma_p(\mathcal{M}) \setminus [\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{M}) \cap \sigma_p(\mathcal{M})] = \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{M})$$

seulement si \mathcal{M} est auto-adjoint.

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{M}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lambda \text{ est val. propre isolée de multiplicité finie} \}$$



Un opérateur \mathcal{A} est dit de Fredholm d'indice 0 si son image est fermée ET $\dim(\text{Ker}(\mathcal{A})) = \text{codim}(\text{Im}(\mathcal{A})) < +\infty$

3. Calcul du spectre essentiel

Problème spectral

$$\mathcal{M}w = \rho w, \text{ avec } \mathcal{M}w = -u'w + (c - u)w' + \frac{\mu}{\eta} w^{(3)} - w^{(4)}.$$

Opérateurs limites

$$\mathcal{M}_{\pm}w = (c - u_{\pm})w' + \frac{\mu}{\eta} w^{(3)} - w^{(4)}, \text{ quand } \xi \rightarrow \pm\infty.$$

3. Calcul du spectre essentiel

Problème spectral

$$\mathcal{M}w = \rho w, \text{ avec } \mathcal{M}w = -u'w + (c - u)w' + \frac{\mu}{\eta^{\frac{2}{3}}}w^{(3)} - w^{(4)}.$$

Opérateurs limites

$$\mathcal{M}_{\pm}w = (c - u_{\pm})w' + \frac{\mu}{\eta^{\frac{2}{3}}}w^{(3)} - w^{(4)}, \text{ quand } \xi \rightarrow \pm\infty.$$

Proposition : [Henry '81] [Pego, Weinstein '92]

Le spectre essentiel de \mathcal{M} est délimité par le spectre des opérateurs \mathcal{M}_{\pm} .

Plus précisément, on note $\sigma(\mathcal{M}_{+}) \cup \sigma(\mathcal{M}_{-})$ la région contenue à l'intérieur ou sur les courbes $\sigma(\mathcal{M}_{+})$ et $\sigma(\mathcal{M}_{-})$, alors $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{M})$ n'intersecte pas la région $\mathbb{C} \setminus \{\sigma(\mathcal{M}_{+}) \cup \sigma(\mathcal{M}_{-})\}$.

Par la transformée de Fourier, on obtient

$$\sigma(\mathcal{M}_{\pm}) =$$

$$\bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = -\tau^4 + i\tau \left(c - u_{\pm} - \frac{\mu}{\eta^{\frac{2}{3}}} \tau^2 \right) \right\}$$

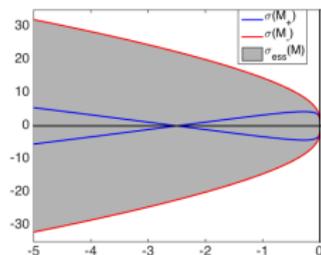


Figure: Le spectre essentiel de \mathcal{M}

Corollaire

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{M}) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \leq 0 \}.$$

4. Étude du spectre ponctuel: la fonction d'Evans

Spectre ponctuel

- ▶ en dimension finie, le polynôme caractéristique,
- ▶ en dimension infinie, la **fonction d'Evans**

Système du premier ordre

Le problème spectral

$$\mathcal{M}w = \rho w, \text{ avec } \mathcal{M}w = -u'w + (c - u)w' + \frac{\mu}{\eta^{\frac{2}{3}}}w^{(3)} - w^{(4)},$$

peut se réécrire sous la forme d'un système du premier ordre, dépendant de ρ

$$\frac{d}{d\xi}W(\xi) = \mathbb{A}(\rho, \xi)W(\xi), \quad \text{avec} \quad \mathbb{A}(\rho, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\rho - u'(\xi) & c - u(\xi) & 0 & \frac{\mu}{\eta^{\frac{2}{3}}} \end{pmatrix}.$$

Opérateurs limites

Nous définissons deux matrices limites quand $\xi \rightarrow \pm\infty$

$$\mathbb{A}_{\pm}(\rho) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathbb{A}(\rho, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\rho & c - u_{\pm} & 0 & \frac{\mu}{\eta^{\frac{2}{3}}} \end{pmatrix}$$

(ces matrices sont associées aux opérateurs limites \mathcal{M}_{\pm} définis précédemment).

Étude du spectre ponctuel : la fonction d'Evans

Sous-espaces stables

$$\text{Spec}(\mathbb{A}_+(\rho)) = \underbrace{\{\lambda_1, \lambda_2\}}_{\Re < 0} \cup \underbrace{\{\lambda_3, \lambda_4\}}_{\Re > 0} \quad \text{et} \quad \text{Spec}(\mathbb{A}_-(\rho)) = \underbrace{\{\mu_1, \mu_2\}}_{\Re < 0} \cup \underbrace{\{\mu_3, \mu_4\}}_{\Re > 0}$$

Soit $\mathbb{E}_+^s(\rho)$ le sous-espace stable de $\mathbb{A}_+(\rho)$.

$$\mathbb{E}_+^s(\rho) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \text{Vect}\{\Phi_{1,+}(\rho, \xi), \Phi_{2,+}(\rho, \xi)\}$$

Soit $\mathbb{E}_{-*}^s(\rho)$ le sous-espace stable de $\mathbb{A}_-(\rho)$.

$$\mathbb{E}_{-*}^s(\rho) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \text{Vect}\{\Psi_{1,-}(\rho, \xi), \Psi_{2,-}(\rho, \xi)\}$$

Définition : Fonction d'Evans

$$D(\rho) = \det \begin{pmatrix} \langle \Psi_{1,-}, \Phi_{1,+} \rangle & \langle \Psi_{1,-}, \Phi_{2,+} \rangle \\ \langle \Psi_{2,-}, \Phi_{1,+} \rangle & \langle \Psi_{2,-}, \Phi_{2,+} \rangle \end{pmatrix}.$$

Proposition : [Benzoni-Gavage et al, '01]

Soit \mathcal{M} l'opérateur du problème spectral et $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{M})$, alors

λ est une valeur propre de \mathcal{M} si et seulement si $D(\lambda) = 0$.

Résultats préliminaires

- Comportement de la fonction d'Evans au voisinage de 0 (résultats numériques)

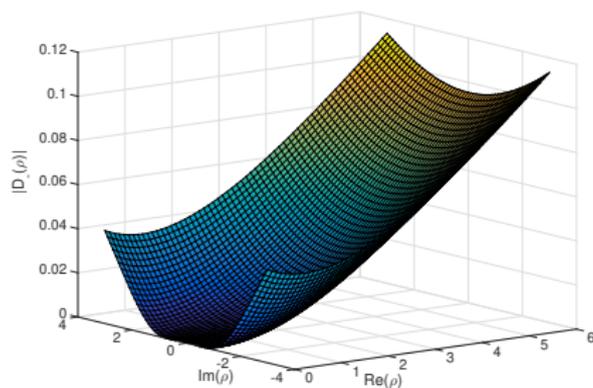


Figure: Fonction d'Evans D au voisinage de 0

Résultats préliminaires

- Comportement de la fonction d'Evans au voisinage de 0 (résultats numériques)

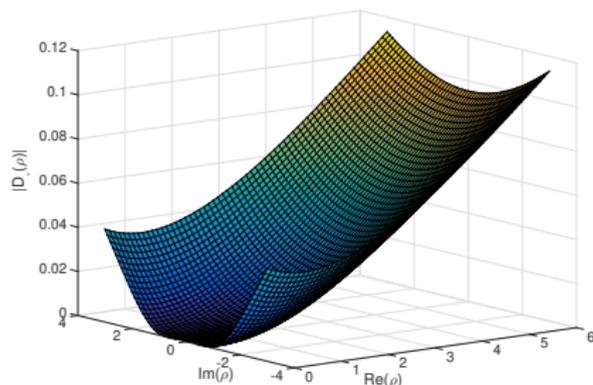


Figure: Fonction d'Evans D au voisinage de 0

- Comportement dans la limite réelle des hautes fréquences

Proposition : [C., Rousset]

preuve

Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, la fonction d'Evans D ne s'annule pas.

Conclusion et perspectives

• Conclusion

- ▶ Nous avons prouvé l'**existence d'un front d'onde** pour l'équation KdV-Burgers.
- ▶ Nous avons prouvé l'**existence d'une onde progressive de petite amplitude** pour l'équation KdV-KS avec diffusion d'ordre 4 et une non-linéarité convexe généralisée.
- ▶ Avec une étude très prospective, l'onde progressive semble spectralement **stable**.

• Perspectives

- ▶ Étudier plus en détail la fonction d'Evans (numériquement et théoriquement).

Merci pour votre attention