Stabilité spectrale d'ondes solitaires pour une équation de Dirac avec une non-linéarité concentrée en un point

avec Claudio Cacciapuoti, Raffaele Carlone, Andrew Comech, Diego Noja et Andrea Posilicano

Nabile Boussaïd

[LmB]

Journées EDP de l'IECL 2022
Université de Lorraine
29 Mars 2022

Équation de type Soler ponctuelle

$$\mathrm{i}\partial_{\boldsymbol{t}}\psi = \boldsymbol{D_m}\psi - \delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\psi^*\boldsymbol{\sigma}_3\psi)\boldsymbol{\sigma}_3\psi$$

Équation de type Soler ponctuelle

Formellement :

$$\mathrm{i}\partial_{\boldsymbol{t}}\psi = \boldsymbol{D_m}\psi - \delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\psi^*\boldsymbol{\sigma}_3\psi)\boldsymbol{\sigma}_3\psi$$

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$,
- $\psi(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}^2$,
- $\boldsymbol{m} > 0$ et

$$\boldsymbol{D_m} := \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}_2\partial_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & \partial_{\boldsymbol{x}} \\ -\partial_{\boldsymbol{x}} & -\boldsymbol{m} \end{bmatrix},$$

- $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}(\mathbb{R}) \cap \boldsymbol{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Équation de type Soler ponctuelle

Formellement :

$$\mathrm{i}\partial_t \psi = D_m \psi - \delta(x) f(\psi^* \sigma_3 \psi) \sigma_3 \psi$$

- $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$,
- $\psi(t, x) \in \mathbb{C}^2$,
- $m > 0$ et

$$D_m := \mathrm{i}\sigma_2 \partial_x + \sigma_3 m = \begin{bmatrix} m & \partial_x \\ -\partial_x & -m \end{bmatrix},$$

- $f \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Rigoureusement :

$$\mathrm{i}\partial_t \psi = H_f^{\mathrm{nl}} \psi, \qquad \psi(t) \in \mathfrak{D}(H_f^{\mathrm{nl}}).$$

Opérateur de type Soler ponctuel

- $H_\pm$ opérateurs de Dirac libres D_m sur $L^2(\mathbb{R}_\pm) \otimes \mathbb{C}^2$ avec

$$\mathfrak{D}(H_\pm) = H^1(\mathbb{R}_\pm) \otimes \mathbb{C}^2.$$

- $H_\circ$ restriction de D_m à $\mathfrak{D}(H_\circ) := \{\psi \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \psi(0) = 0\}$ est fermé symétrique, d'adjoint $H_\circ^* = H_- \oplus H_+$ et indices de défaut $(2, 2)$.
- H_f^{nl} Dirac avec non-linéarité concentrée [1] restriction de $H_\circ^*$ à

$$\mathfrak{D}(H_f^{\mathrm{nl}}) = \left\{\psi \in H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes \mathbb{C}^2, \, \mathrm{i}\sigma_2[\psi]_0 - f(\hat{\psi}^*\sigma_3\hat{\psi})\sigma_3\hat{\psi} = 0\right\},$$

avec

$$\hat{\psi} := \frac{1}{2}(\psi(0^+) + \psi(0^-)) \quad [\psi]_0 := \psi(0^+) - \psi(0^-)$$

"la moyenne" et le "saut" du spineur ψ en $x = 0$.

1. Cacciapuoti et al., "The one-dimensional Dirac equation with concentrated nonlinearity".

Les états stationnaires

Solutions $\psi(t,x)=\phi_\omega(x)e^{-\mathrm{i}\omega t}$, $\omega\in\mathbb{R}$ avec ϕ_ω

$$(D_m-\omega I_2-\delta(x)f\sigma_3)\phi=0$$

(donc $\omega\in\mathbb{R}$) ou

$$\begin{bmatrix} m-\omega & \partial_x \\ -\partial_x & -m-\omega \end{bmatrix}\phi(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^*,\qquad \text{et}\quad [\phi]_0=f(\hat\phi^*\sigma_3\hat\phi)\sigma_1\hat\phi.$$

ou

$$\phi_\pm(x)=v_\pm e^{\mp\varkappa(\omega)x},\quad v_\pm\in\mathbb{C}^2,\qquad \text{et}\quad [\phi]_0=f(\hat\phi^*\sigma_3\hat\phi)\sigma_1\hat\phi$$

$$\varkappa(\omega):=\sqrt{m^2-\omega^2}$$

et donc $\omega\in(-m,m)$.

Lemme

- $\omega \in (-m, m) \setminus \{0\}$,
  - $a \in \mathbb{C}$ *tel que* $f(|a|^2) = 2\mu(\omega)$

$$\psi(t,x) = \begin{bmatrix} a \\ a\mu(\omega)\,\mathrm{sgn}\,x \end{bmatrix} e^{-\varkappa(\omega)|x|} e^{-\mathrm{i}\omega t},$$

  - $b \in \mathbb{C}$ *tel que* $f(-|b|^2) = \frac{2}{\mu(\omega)}$

$$\psi(t,x) = \begin{bmatrix} b\mu(\omega)\,\mathrm{sgn}\,x \\ b \end{bmatrix} e^{-\varkappa(\omega)|x|} e^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

- $\omega = 0$

$$\psi(t,x) = \begin{bmatrix} a + b\,\mathrm{sgn}\,x \\ b + a\,\mathrm{sgn}\,x \end{bmatrix} e^{-m|x|},$$

$a,\ b \in \mathbb{C}$ *tels que* $f(|a|^2 - |b|^2) = 2$.

$$\mu(\omega) := \sqrt{\frac{m-\omega}{m+\omega}}$$

La symétrie de Bogoliubov ($SU(1,1)$)

Le cas stationnaire

$K : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la conjugaison complexe

- Si f paire et

$$\psi(t,x) = \beta \begin{bmatrix} \mu(\omega)\,\mathrm{sgn}\, x \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\varkappa(\omega)|x|} e^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad \beta \in \mathbb{C},\ f(-|\beta|^2) = 2/\mu(\omega),$$

une onde solitaire alors

$$\psi^C(t,x) = \sigma_1 K \psi(t,x) = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \mu(\omega)\,\mathrm{sgn}\, x \end{bmatrix} e^{-\varkappa(-\omega)|x|} e^{\mathrm{i}\omega t},$$

$f(|\beta|^2) = 2\mu(-\omega)$, est une onde solitaire.

- $\omega = 0$, $f(|a|^2 - |b|^2) = 2$, $|a| > |b|$,

$$\phi_0(x) = (A + B\sigma_1 K) \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0\,\mathrm{sgn}\, x \end{bmatrix} e^{-m|x|}$$

$A = a/\sqrt{|a|^2 - |b|^2}$, $B = b/\sqrt{|a|^2 - |b|^2}$, $a_0 = \sqrt{|a|^2 - |b|^2}$.

La symétrie de Bogoliubov

- $\psi(t,x)$ solution

$$\Longrightarrow (A + B\sigma_1 K)\psi(t,x) \text{ solution}$$

  pour $A,\ B \in \mathbb{C}$ avec $|A|^2 - |B|^2 = 1$.
- Pour $\psi(t,x) = \phi_\omega(x)e^{-\mathrm{i}\omega t}$

$$(A + B\sigma_1 K)\psi(t,x) = A\phi_\omega(x)e^{-\mathrm{i}\omega t} + B\phi_\omega^C(x)e^{\mathrm{i}\omega t}.$$

- $\psi(t,x)$ est solution, f paire, $\psi^C(t,x) = \sigma_1 K\psi(t,x)$ solution.

Le cadre

On considère l'onde solitaire

$$\psi(t,x) = \phi_\omega(x) e^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad \phi_\omega(x) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \mu(\omega)\,\mathrm{sgn}\, x \end{bmatrix} e^{-\varkappa(\omega)|x|},$$

avec $\alpha > 0$ tel que

$$f(\alpha^2) = 2\mu(\omega).$$

$$\varkappa(\omega) = \sqrt{m^2 - \omega^2} \qquad \mu(\omega) = \sqrt{\frac{m-\omega}{m+\omega}}.$$

La linéarisation

Ansatz

$$\psi(t,x) = (\phi_\omega(x) + r(t,x) + \mathrm{i}s(t,x))e^{-\mathrm{i}\omega t},$$

avec

$$\big(r(t,x),\ s(t,x)\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

tels que

$$\begin{cases} -\dot{s} & \approx (D_m - \omega)r - \delta(x) f \sigma_3\, r - \delta(x)(\phi^* \sigma_3\, r) 2 g \sigma_3\, \phi, \\ \dot{r} & \approx (D_m - \omega)s - \delta(x) f \sigma_3\, s. \end{cases}$$

$$f = f(\alpha^2), \qquad g = f'(\alpha^2).$$

Posons

$$\kappa := \frac{\alpha^2 f'(\alpha^2)}{f(\alpha^2)} \in \mathbb{R}.$$

L'équation linéarisée

Donnée par

$$\partial_t \begin{bmatrix} \boldsymbol{r(t,x)} \\ \boldsymbol{s(t,x)} \end{bmatrix} = \mathsf{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r(t,x)} \\ \boldsymbol{s(t,x)} \end{bmatrix},$$

où

$$\mathsf{A}(\omega,\kappa) = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{L}(\omega,0) \\ -\boldsymbol{L}(\omega,\kappa) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}(\omega,\kappa) = \boldsymbol{D_m} - \omega \boldsymbol{I}_2 - 2\mu(\omega)\delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}_3 + 4\mu(\omega)\kappa\delta(\boldsymbol{x})\Pi_1$$

$\omega \in (-\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{I}_2$ l'identité de $\mathbb{C}^2$ et

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La stabilité spectrale

Qu'est-ce ?

La stabilité spectrale

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_{\text{pair-impair}} &= \boldsymbol{L}^2_{\text{pair}}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \times \boldsymbol{L}^2_{\text{impair}}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2),\\ \mathrm{X}_{\text{impair-pair}} &= \boldsymbol{L}^2_{\text{impair}}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \times \boldsymbol{L}^2_{\text{pair}}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2),\end{aligned}$$

invariants par $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\kappa})$ et $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2) = \mathrm{X}_{\text{impair-pair}} \oplus \mathrm{X}_{\text{pair-impair}}$.

Lemma (Un premier résultat)

1. $\boldsymbol{\sigma}_{\text{ess}}\big(\boldsymbol{L}(\omega,\kappa)\big) = \mathbb{R} \setminus (-\boldsymbol{m}-\omega, \boldsymbol{m}-\omega)$,
   $\boldsymbol{\sigma}_{\text{ess}}\big(\boldsymbol{L}(\omega,\kappa)\big) \cap \boldsymbol{\sigma}_{\text{p}}\big(\boldsymbol{L}(\omega,\kappa)\big) = \emptyset$;
2. $\boldsymbol{\sigma}_{\text{p}}\big(\boldsymbol{L}(\omega,\kappa)|_{\mathrm{X}_{\text{impair-pair}}}\big) = \{-2\omega\}$ *et* $\boldsymbol{\lambda} = -2\omega$ *est simple ;*
3. $\boldsymbol{\sigma}_{\text{p}}\big(\boldsymbol{L}(\omega,\kappa)|_{\mathrm{X}_{\text{pair-impair}}}\big) = \big\{\boldsymbol{Z}(\omega,\kappa)\big\}$, *et*

$$\boldsymbol{Z}(\omega,\kappa) = -4(\boldsymbol{m}-\omega)\frac{\kappa(\kappa+1)}{1+(1+2\kappa)^2\mu^2} \in (-\boldsymbol{m}-\omega, \boldsymbol{m}-\omega),$$

est simple.

La stabilité spectrale

- La symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ et $\mathbf{i}\mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(\mathsf{A}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\kappa})) \quad \Leftrightarrow -\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(\mathsf{A}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\kappa})) \\ \Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(\mathsf{A}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\kappa})).$$

- Le spectre essentiel

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{ess}}(\mathsf{A}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\kappa})) = \begin{cases} \mathbf{i}(\mathbb{R} \setminus (-\boldsymbol{m} + |\omega|, \boldsymbol{m} - |\omega|)), & (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\kappa}) \neq (0, -1)\,; \\ \mathbb{C}, & (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\kappa}) = (0, -1). \end{cases}$$

- Les valeurs propres $\pm 2\omega\mathbf{i}$

$$\pm 2\omega\mathbf{i} \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(\mathsf{A}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\kappa})|_{\mathsf{X}_{\text{impair-pair-impair-pair}}})$$

  - $\pm 2\omega\mathbf{i}$ simple si $\boldsymbol{\omega} \neq 0$
  - $\pm 2\omega\mathbf{i}$ de multiplicité géométrique 2 si $\boldsymbol{\omega} = 0$.

La stabilité spectrale

Un bout de preuve

A est invariant sur $\mathrm{X}_{\text{impair-pair-impair-pair}}$.
Pour $\boldsymbol{x} \neq 0$, $\mathrm{A}\Psi = \boldsymbol{\lambda}\Psi$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ dans $\mathrm{X}_{\text{impair-pair-impair-pair}}$, $\Psi(\boldsymbol{x}) =$

$$\boldsymbol{c}_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_+(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) \operatorname{sgn} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{S}_+(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) \\ -\mathrm{i}\boldsymbol{\nu}_+(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) \operatorname{sgn} \boldsymbol{x} \\ -\mathrm{i}\boldsymbol{S}_+(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) \end{bmatrix} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\nu}_+(\boldsymbol{\omega}, \Lambda)|\boldsymbol{x}|} + \boldsymbol{c}_2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_-(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) \operatorname{sgn} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{S}_-(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) \\ \mathrm{i}\boldsymbol{\nu}_-(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) \operatorname{sgn} \boldsymbol{x} \\ \mathrm{i}\boldsymbol{S}_-(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) \end{bmatrix} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\nu}_-(\boldsymbol{\omega}, \Lambda)|\boldsymbol{x}|},$$

$\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2 \in \mathbb{C}$, où $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{i}\Lambda$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}_+(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) &:= \sqrt{\boldsymbol{m}^2 - (\boldsymbol{\omega} + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda})^2} = \sqrt{\boldsymbol{m}^2 - (\boldsymbol{\omega} - \Lambda)^2}, \qquad \Re\boldsymbol{\nu}_+(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}) \geq 0, \\ \boldsymbol{\nu}_-(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) &:= \sqrt{\boldsymbol{m}^2 - (\boldsymbol{\omega} - \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda})^2} = \sqrt{\boldsymbol{m}^2 - (\boldsymbol{\omega} + \Lambda)^2}, \qquad \Re\boldsymbol{\nu}_-(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}_+(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{\omega} + \Lambda, \qquad \boldsymbol{S}_-(\boldsymbol{\omega}, \Lambda) = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{\omega} - \Lambda.$$

La stabilité spectrale

Un bout de preuve (suite)

$$\begin{cases} 2\mathrm{i}\nu_+ c_1 - 2\mathrm{i}\nu_- c_2 + 2\mu(-\mathrm{i}S_+ c_1 + \mathrm{i}S_- c_2) = 0, \\ 2\nu_+ c_1 + 2\nu_- c_2 - 2\mu(S_+ c_1 + S_- c_2) = 0. \end{cases}$$

$$\det \begin{bmatrix} \mathrm{i}\nu_+ - \mathrm{i}S_+\mu & -\mathrm{i}\nu_- + \mathrm{i}S_-\mu \\ \nu_+ - S_+\mu & \nu_- - S_-\mu \end{bmatrix} = 2\mathrm{i}(\nu_- - S_-\mu)(\nu_+ - S_+\mu) = 0.$$

$$\nu_- - S_-\mu = 0 \Rightarrow m^2 - (\omega + \Lambda)^2 = \frac{m-\omega}{m+\omega}(m - \omega - \Lambda)^2$$

$$\Rightarrow (m+\omega)^2 - (m-\omega)^2 = -2m\Lambda \Rightarrow \Lambda = -2\omega.$$

$$\nu_+ - S_+\mu = 0 \Rightarrow \Lambda = 2\omega.$$

La stabilité spectrale

Noyau : multiplicité géométrique

$$0 \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{p}}(\mathsf{A}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\kappa})).$$

De plus

$$\dim \ker(\mathsf{A}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\kappa})) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{\omega} \neq 0,\ \boldsymbol{\kappa} \notin \{-1, 0\}, \\ 2, & \boldsymbol{\omega} \neq 0,\ \boldsymbol{\kappa} \in \{-1, 0\}, \\ 3, & \boldsymbol{\omega} = 0,\ \boldsymbol{\kappa} \notin \{-1, 0\}, \\ 4, & \boldsymbol{\omega} = 0,\ \boldsymbol{\kappa} \in \{-1, 0\}. \end{cases}$$

La stabilité spectrale

Noyau : multiplicité algébrique

$$\dim \mathfrak{L}(\mathrm{A}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\kappa})) = \begin{cases} 2, & \boldsymbol{\omega} \in (-\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}) \setminus \{0,\Omega_{\boldsymbol{\kappa}}\}, \quad \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R} \setminus [-1/3,1]; \\ 4, & \boldsymbol{\omega} = \Omega_{\boldsymbol{\kappa}}, \quad \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R} \setminus (\{-1\} \cup [-1/3,1]); \\ 4, & \boldsymbol{\omega} \in (-\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}), \quad \boldsymbol{\kappa} = 0; \\ 6, & \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \boldsymbol{\kappa} = -1. \end{cases}$$

$\mathfrak{L}(\mathrm{A}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\kappa}))$ le noyau généralisé de $\mathrm{A}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\kappa})$.

$$\Omega_{\boldsymbol{\kappa}} := \frac{\boldsymbol{\kappa}+1}{2\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{m}, \qquad \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$|\Omega_{\boldsymbol{\kappa}}| < \boldsymbol{m}, \quad \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R} \setminus [-1/3,1]$$

La stabilité spectrale

Noyau : la preuve

Dans $\mathrm{X}_{\text{pair-impair-pair-impair}}$

$$\mathrm{A}\begin{bmatrix}0\\ \phi_\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \qquad \mathrm{A}\begin{bmatrix}\partial_\omega\phi_\omega\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \phi_\omega\end{bmatrix}.$$

$\exists\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$ tel que

$$\boldsymbol{L}(\omega,0)\boldsymbol{\theta} = \partial_\omega\phi, \qquad \mathrm{A}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial_\omega\phi\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2\langle\phi_\omega,\partial_\omega\phi_\omega\rangle = \partial_\omega\boldsymbol{Q}(\phi_\omega) = 0 \text{ (Condition de Kolokolov.)}$$

$$\partial_\omega\boldsymbol{Q}(\phi(\omega)) = \frac{2\boldsymbol{m}\alpha^2}{(\boldsymbol{m}+\omega)\varkappa^3}\Big(-\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\kappa}} - \boldsymbol{m} + 2\omega\Big).$$

$$\frac{\omega}{\boldsymbol{m}} = \frac{1+\boldsymbol{\kappa}}{2\boldsymbol{\kappa}} \text{ donne } \Omega_{\boldsymbol{\kappa}}.$$

La stabilité spectrale

Resonances (aux seuils non plongés)

Si $\omega \neq 0$, $\boldsymbol{\lambda} = \pm(\boldsymbol{m} - |\omega|)\mathbf{i}$ est une résonance si

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} \mathcal{T}_{\boldsymbol{\kappa}}^{-} := \dfrac{(\boldsymbol{\kappa}+1)^2}{(\boldsymbol{\kappa}+2)\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{m}, & -1 < \boldsymbol{\kappa} < 2^{-1/2} - 1\,; \\ \mathcal{T}_{\boldsymbol{\kappa}}^{+} := \dfrac{(\boldsymbol{\kappa}+1)^2}{(3\boldsymbol{\kappa}+2)\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{m}, & \boldsymbol{\kappa} < -1 \text{ and } \boldsymbol{\kappa} > 2^{-1/2}. \end{cases}$$

La stabilité spectrale

Les valeurs propres non nulles, cas $\boldsymbol{\kappa} < -1$

- Deux valeurs propres imaginaires pures dans la lacune spectrale $\boldsymbol{\omega} \in (\mathcal{T}_{\boldsymbol{\kappa}}^{+}, \Omega_{\boldsymbol{\kappa}})$;
- Deux valeurs propres réelles (donc instabilité) pour $\boldsymbol{\omega} \in (\Omega_{\boldsymbol{\kappa}}, 2\Omega_{\boldsymbol{\kappa}})$, tendant vers $\pm\infty$ avec $\boldsymbol{\omega} \to 2\Omega_{\boldsymbol{\kappa}} - 0$;
- Rien d'autre sinon.

La stabilité spectrale

Les valeurs propres non nulles, cas $\boldsymbol{\kappa} = -1$

- Pour $\omega = 0$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) = \mathbb{C} \setminus \big(\mathbf{i}(-\infty, -\boldsymbol{m}] \cap \mathbf{i}[\boldsymbol{m}, +\infty)\big)$ (instabilité) ;
- Rien d'autre sinon.

La stabilité spectrale

Les valeurs propres non nulles, cas $-1 < \kappa < 2^{-1/2} - 1$

- Deux valeurs propres réelles (donc instabilité) pour

$$\omega \in (\max(2\Omega_\kappa, -m), \max(\Omega_\kappa, -m))$$

(vide si $-1/3 \le \kappa < 2^{-1/2} - 1$).
Si $-1 < \kappa \le -2/3$ ($\Rightarrow 2\Omega_k \in [-m, 0)$), tend vers $\pm\infty$ lorsque $\omega \to 2\Omega_\kappa + 0$;

- Deux valeurs propres imaginaires pures dans la lacune spectrale $\omega \in (\max(\Omega_\kappa, -m), \mathcal{T}_\kappa^-)$;
- Rien d'autre sinon.

La stabilité spectrale

Les valeurs propres non nulles, cas $2^{-1/2} - 1 \le \kappa \le 2^{-1/2}$

Rien d'autre pour $\omega \in (-m, m)$.

La stabilité spectrale

Les valeurs propres non nulles, cas $2^{-1/2} < \kappa \leq 1$

- Deux valeurs propres imaginaires dans la lacune spectrale $\omega \in (\mathcal{T}_{\kappa}^{+}, m)$;
- Rien d'autre sinon.

La stabilité spectrale

Les valeurs propres non nulles, cas $\boldsymbol{\kappa} > 1$

- Deux valeurs propres imaginaires pures dans la lacune spectrale si $\boldsymbol{\omega} \in (\mathcal{T}_{\boldsymbol{\kappa}}^{+}, \min(\Omega_{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{m}))$;
- Deux valeurs propres réelles (donc instabilité) pour $\boldsymbol{\omega} \in (\min(\Omega_{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{m}), \boldsymbol{m})$
- Rien d'autre sinon.